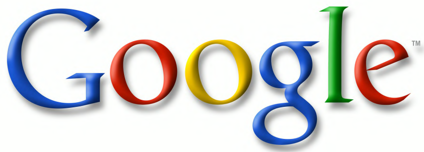
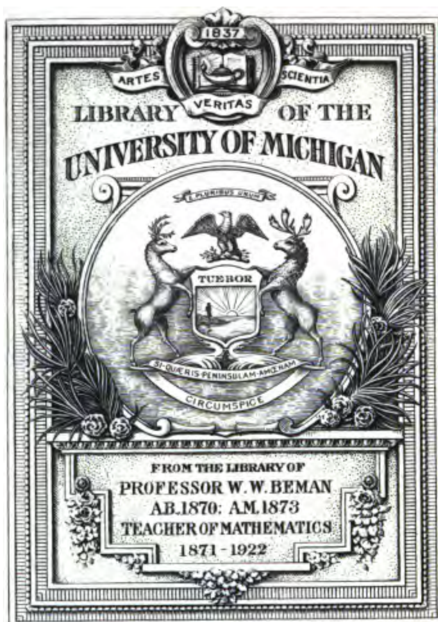



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE
FROM THE LIBRARY OF
PROFESSOR W. W. BEMAN
A.B. 1870: A.M. 1873
TEACHER OF MATHEMATICS
1871 - 1922

Meyer.
Stralsund 1823.

Index.

Woster W. Beman, 1874.

HISTORIA
PROBLEMATIS
DE
CVBI DVPLICATIONE

SIVE DE

INVENIENDIS DVABVS MEDIIS
CONTINVE PROPORTIONALIBVS
INTER DVAS DATAS

AVCTORE

NICOLAO THEODORO REIMER

PHILOS. DOCT. ET AA. LL. MAG.

ACCEDVNT TABVLAE AENEAE.

GOTTINGAE

APVD JOANN. CHRISTIAN. DIETERICH.

MDCCXCVIII.

W. W. Beman
5-29-1923

SERENISSIMO

PRINCIPI AC DOMINO

DOMINO

FRIDERICO CHRISTIANO

DVCI

SCHLESVICO-HOLSATO-SONDERBVRGO-AVGVSTENBVRGI

REGNANTI

INTER REGII DANICI SENATVS SANCTIORIS PROCERES ADSCRIPTO

ORDINIS ELEPHANTINI EQVITI AVRATO

ACADEMIAE HAFNIENSIS CONSERVATORI SVMMO ET PATRONO

DYNASTAE IN GRAVENSTEIN

REL. REL. REL.

Etsi bene intelligo, quam confidenter id a me factum sit, quod NOMINI TVO,

PRINCEPS SERENISSIME!

hunc libellum inſcribere auſus ſum: veniam tamen temerarii huius auſus facile me conſequuturum eſſe cum alia ſunt, quae mihi ſpem faciunt iucundiſſimam, tum ſumma laus, qua celebratur lenitas et indulgentia TVA, quae adducit TE, vt in mitius inter-

preteris, si iuuenem, in academiis cum patria tum extera studiorum curriculo exacto, iam doctrinae suae specimen propositurum, in votis id habere videas, vt ille, cum summa TVARVM virtutum admiratione percussus sit, deuotissimi animi sensus, cum summa pietatis testificatione, palam TIBI,

PRINCEPS SERENISSIME!

declarare poſſit, quem vt de litteris elegantioribus, ita etiam ſublimioribus mentis humanae diſciplinis acutiſſimum iudicem et arbitrum ſe habere Dania erudita gloriatur. Accipe itaque placido vultu qualescunque has lucubrationes, NOMINI TVO *de-*

votiſſime inſcriptas, quae in grauiſſimis et praeſtantiſſimis nonnullorum antiquitatis ſumma ingenii vi et acumine inſignium hominum in Geometriae aliquod problema olim maxime perplexum disquiſitionibus enarrandis et diiudicandis verſantur. Equidem pro TVA ſalute vitaeque diuturnitate, cum ipſa patriae ſalute con-

iunctissima, ad Deum T. O. M. nunquam non preces mittam ardentissimas,

SERENISSIMI
NOMINIS TVI

Gottingae,
die XXIII. Julii, MDCCXCVII.

cultor deuotissimus
Nicolaus Theodorus Reimer.

LECTVRIS

S.

Eſt hic, qui Vobis traditur, liber quaſi pars operis maioris, iam dudum a me inchoati, quo eorum trium nobiliſſimorum problematum, quae de circuli quadratura, de mediarum continue proportionalium inuentione, et de anguli triſectione vulgo appellantur, hiſtoriam ſimul complecti meditabar; hoc quidem inprimis reſpectu habito, vt, quantopere profuerit ipſorum diſquirendorum ſtudium

ad

ad excolendam augendamque vniuerſam mathematicam cognitionem, inprimis autem Geometriam, narratione a primis horum problematum originibus, ab antiquiſſima ferme Geometriae tractatione iam repetendis, ad ſummam vsque recentiorum temporum huius diſciplinae perfectionem deducta, omnino docere eniterer. Sed quamuis ipſa huius incepti moles et non exigua difficultas ſtudium meum et induſtriam minime reprimerent: adfuere tamen mox aliae cauſſae, quas hic commemorare nihil attinet, quae, vt qnod huic operi abſoluendo requireretur tempus longius iam impenderem, admodum diſſuaderent.

Prodit igitur hocce libro ſola problematis de mediarum continue proportionalium inuentione, ſiue, quo nomine illud

magis

magis celebratum fuit, de cubi duplicatione hiſtoria: in qua conſcribenda easdem, quas in opere illo maiori mihi propoſitas fuiſſe iam monui, rationes ſequutus ſum; atque eo quidem magis, cum prae ceteris huius maxime problematis tractationem cum primis illis Geometriae ſublimioris originibus et incrementis ita coniunctam fuiſſe perſpicerem, vt ad diſciplinae illius hiſtoriam rectius cognoſcendam diiudicandamque, etiam noſtri problematis hiſtoriae paulo accuratiorem tenere cognitionem, neceſſe eſſe appareret. Quare etiam factum eſt, praeſertim cum ſingularis huius problematis vſus in multis vitae communis veterum rebus ex antiquis ſcriptoribus inſuper vberius eſſet illuſtrandus, vt in prolixiores de ſingulis veterum auctorum locis diſquiſitiones digrediendi

grediendi ſaepius mihi eſſet occaſio: qua tamen ſemper ita vſus eſſe mihi videor, vt nunquam ea, quae ab ipſa re propoſita iam nimis aliena haberi poſſent, longius proſequerer; multa etiam, quamuis cum ipſa hac hiſtoria ſatis cohaerere viderentur, (ne libri moles nimis accreſceret) breuiter tantum notarem, cum vberiorem ipſorum illuſtrationem in aliud tempus ſeruare apud me decreuiſſem. In exponendis, quae in hoc libro leguntur, ſingulis veterum Geometrarum noſtri problematis ſoluendi rationibus ita ſum verſatus, vt vniuscuiusque auctoris graeca ſumma cum fide latine exprimerem, nec quidquam in ipſis temere mutarem; quanquam pro iis, quae in demonſtrationibus graecis ipſis verbis nimis prolixe enuntiata ſunt, notiora illa Matheſeos recentioris

tioris ſigna breuitatis ſtudio adhibere non dubitaui. Quae praeterea hisce demonſtrationibus ad maiorem ipſarum illuſtrationem nonnunquam interponenda duxi, vbi ad Euclidis elementa, in ipſis etiam Geometrarum Euclide antiquiorum ſolutionibus, prouocaui: cum vncis incluſa exhibeantur, non erunt impedimento, ſi qui forte ad hunc libellum euoluendum acceſſerint Geometrae, in Geometria autem minus verſatis lectoribus fore vt grata ſint et exoptata, ſperaui.

Ceterum, quod ſub huius praefatiunculae finem praetermittere non poſſum, ſi hunc meum qualemcunque antiquitati mathematicae illuſtrandae impenſum laborem non prorſus irritum eſſe iudicaturi ſint lectores aequi reique intelligentes: hoc inprimis in acceptis referendum ha-

bebo

bebo Duumuiris ſummis, praeceptoribusque meis omni laude maioribus, *Kaeſtnero* et *Heynio*, quorum quidem conſiliis monitisque ad ipſa haec ſtudia, quibus nunc fere vnice delector, animum meum conformatum eſſe cum gratiſſimi animi ſignificatione profiteor. Scripſi in Academia Georgia Auguſta, menſe Julio, MDCCXCVII.

Cap. I.

CAP. I.

INTRODVCTIO.

Inter grauissimas et celeberrimas Geometriae a Graecis cultae quaestiones, quae, quamuis ab Mathematicorum sollertissimis sagacissimisque diu et multum tractatae, tamen ipsorum indaginem semper quodam modo subterfugisse perhibentur; videmus plane nullam, quae a tam antiquis inde temporibus iam in medium prolata, tam insigni studio et adsiduitate per omne tempus fere aequabili versata, tot ac tantorum virorum exercuerit ingenia, iisque altius inquirendi et ad sublimiora cognitionis mathematicae progrediendi incitamenta suppeditando et quasi calcaria, tantopere profuerit ad augendam et amplificandam vniuersam Mathesin, quam

problema illud, quod *de cubi duplicatione*, siue *de inueniendis duabus mediis continue proportionalibus* vulgo appellant.

Definitur autem *cubus* esse figura solida sex quadratis aequalibus comprehensa, *ipsamque duplicare* nihil aliud significat, quam exstruere ex ipso alium cubum, qui sit duplum ipsius dati. Quod cum perfici ostensum sit, si inter latus cubi dati et lateris duplum duae mediae continue proportionales inueniantur, quarum mediarum prior sit latus cubi duplicati *): factum est, vt illud *de cubi duplicatione* problema in hoc, quo *duae mediae continue proportionales inter duas datas inueniendae* proponuntur, abiret, saepiusque hoc nomine postea insigniretur. Quarum mediarum proportionalium inuentio si demonstrata sit, cum inde facile eliciatur et triplicandi aut secundum quamuis aliam datam proportionem augendi vel minuendi cubi ratio: etiam

*) Adsumatur enim inter duas datas g et 2g, quarum altera sit latus cubi dati, altera hocce latus duplicatum, quae inveniendae sint duae mediae continue proportionales, harum prior esse z. Erit igitur $g:z = z:\frac{z^2}{g} = \frac{z^2}{g}:\frac{z^3}{g^2}$. Est autem $\frac{z^3}{g^2} = 2g$. Vnde fiet $z^3 = 2g^3$; et $z = \sqrt[3]{2g^3}$.

etiam hanc ſimul reſpexiſſe Geometras, quoties ad ſoluendum problema de cubo duplicando animos adplicarent, moneri vix opus eſt.

Iam cum omnis Geometria, quemadmodum et Plato ipſius naturam nomenque conſtituiſſe fertur, propriè ad metiendum ſit comparata; et quidem a lineis exorſa ad tractandas ſuperficies pergat, quibus abſolutis denique ad ſolida ſeu corpora accedat, Longimetriae Planimetriam, vtrique harum vero Stereometriam ſuperſtruens; ita vt haec poſterior pars quaſi ſummus finis extremaque totius ſcientiae meta, quo omnia praemiſſa tendant vergantque, et quae cetera quaſi poteſtate complectatur, ſummorum Geometrarum conſenſu habenda ſit: quanta ſit huius de cubo duplicando problematis vis et dignitas, quemque inſignem locum in vniuerſa Geometria occupet, iam ſatis ſuperque elucere videtur. Praeſertim cum haec figura inter omnes ſolidas ſit maxime ſimplex et regularis, ad quam omnes reliquae ſervata ipſarum magnitudine facillime poſſint reduci et transformari, ideoque pro communi menſura in Stereometria (quemadmodum quadratum in Planimetria) merito ſit conſtituta et recepta: vnde facile intelligitur, quae in Stereometria de reliquis figuris ſolidis quavis data ratione

 augen-

augendis minuendisve, vel de ipſarum ſingulis in alias alterius formae externae v. c. cono vel cylindro in ſphaeram, ſeruata tamen ipſarum magnitudine, mutandis et transformandis proponantur problemata, omnia cum hoc, quod dicitur de cubi duplicatione ſeu de inueniendis duabus mediis continue proportionalibus, arctiſſime cohaerere atque ab ipſo fere penitus pendere et includi.

Accedit quae inde oritur ad varios vſus vitae communis ſumma huius problematis ſoluti neceſſitas, apud veteres ſatis cognita et celebrata, nec a noſtrarum rerum conditione prorſus aliena. Vt enim quas habuit antiquitas ſiccorum liquidorumque menſuras, v. c. medimnos, metretas, aliaque cuiusuis generis vaſa atque inſtrumenta praetermittamus, quorum quidem omnium dimenſio, quantum vnumquodque contineat, conſtituendis ipſis in cubum, noſtro problemati penitus innititur: etiam in re architectonica et mechanica, quin et in re militari veterum noſtri problematis ſolutio nullo modo ignorari potuit. In dimetiendis enim et exſtruendis aris, templis, aliisque aedificiis, quemadmodum ibi fere omnia ad mediarum proportionalium inuentionem redeunt, ſic et ad recte conſtituendum machinarum bellicarum, veluti catapultarum, baliſtarumque effectum, ſecundum

cundum certam proportionem in ipsis adornandas esse crassitudines, magnitudines, foramina, choenicides, quique iis inserantur nerui, Eratosthenes, et qui de telorum fabrica scripsere, Hero Alexandrinus atque Philo Byzantius testantur; ita vt qui in recentiorum arte tormentoria sit vsus instrumenti illius, quod vulgo Calibrae Regulam vocant, eundem fere apud veteres praestitisse cubi duplicationem appareat. Vidd. Eutocius ad Archimedem, edit. Oxon. 1792. pag. 144 sq.; Hero atque Philo in Mathematicorum veterum collectione Theuenoti, Paris. 1693. pag. 51 sq. et pag. 141 sqq.; nec non Pappus in praef. lib. VIII. coll. math. edit. Bonon. 1660. pag. 449.

Non mirari igitur debemus, vnde fuerit in hac re tentanda tantus ardor, tantaque fere aemulatio, quae tamdiu obsedit veterum Mathematicorum animos, adeo vt fere quaeuis antiquitatis aetas satis magnam huius problematis solutionum proferri viderit farraginem. Quamuis autem ex numero horum, qui huic rei perficiendae incumberent, fuerint et tales multi, qui, quum et insigni mentis acumine sagacitateque et promouenda Mathesi ipsa meritis longe grauissimis summam nominis celebritatem sint nacti, principes veterum Mathematicorum iure dicantur: tamen ipsorum co-

 namina

namina adfirmare licet fuiſſe ſic quidem irrita, vt ſimplicem et Geometriae elementari conſentaneam, eamque tamen abſolutam, neque quidquam contra geometricam ſeueritatem delinquentem huius problematis praeſtare non poſſent ſolutionem. Vt enim praetereamus, quas ſagaciorum nonnulli per lineas curuas circulo altiores propoſuere ſolutiones, ſatis accuratas quidem, ſed ad praxin difficiliores, atque a Geometriae elementari inſtitutione prorſus alienas: quae ceteroquin fuere prolatae ſolutiones, eas, maxime ad vſus vitae communis excogitatas, omnes eſſe ita comparatas, vt meris tentaminibus et repetitis experimentis, de quibus tantum oculorum iudicium haberi poſſit, conſiſtant, vel praeter rectam et circulum adhuc certum quoddam inſtrumentum mechanicum in conſtructione requirant, ideoque ſolitam in demonſtrando geometricam ſeueritatem plane reſpuant, non ſine quodam animi dolore et afflictione perſpexere eorum plerique, qui in hiſce ſoluendi rationibus ad iuſtas Geometriae leges exhibendis diu fruſtra deſudauerant. Quamobrem et Euclides, cum ad opus ſuum elementorum geometricorum conſcribendum accederet, et deſideriis ſuis nequaquam ſatisfacere vllam ex iſta noſtri problematis ſolutionum frequentia probe perſpiceret, omnem doctrinam de quantitatibus commenſu-

mensurabilibus et incommensurabilibus (lib. X.) ita tractasse, inprimisque in Stereometria de quinque corporibus regularibus ita egisse habendus est, vt a problemate de cubo duplicando prorsus se abstinuerit.

Quae autem veterum fuit de hac re tam insignis contentio et sollicitudo, eam in nostra tempora non amplius cadere, solutionemque ipsam problematis non ita inuictis difficultatibus obstrictam esse, quo minus ope Arithmetices nostrae facile perficiatur, in promptu est. Quisquis enim vel leuiter Mathemata attigerit, mox cognitum habebit, si ex numero, qui designet cubum datum, dupliciter sumto extrahatur radix cubica, tum inueniri latus istius cubi, qui sit duplum dati. Cui notissimae et simplicissimae soluendi rationi adfinis est ea, quae in Geometria sublimiori ope Analyseos tradi solet, innititurque nimirum aequationum cubicarum constructioni, quam primus docuit et ad duarum mediarum continue proportionalium inuentionem idonea perfectione applicauit, qui et omnino transferendo Arithmetices calculo in Geometriam de huius disciplinae problematibus faciliori magisque vniversali ratione soluendis insigniter meruit apud recentiores laudatissimus ille Cartesius (in Geo-

 metriae

metriae lib. III); quem subsequuti sunt plures vberioribus et accuratioribus disquisitionibus hanc rem perstringentes. Videatur hac de re inprimis Francisci Renati Slusii Mesolabium s. duae mediae proportionales inter extremas datas per circulum et per infinitas hyperbolas et ellipses et per quamlibet exhibitae, Leodii Eburonum, 1668.

Quid? quod est et huic recentiori Analysi, quam Cartesius primum est auspicatus, soli in acceptis referendum, quod veram et singularem problematis de inueniendis mediis proportionalibus naturam penitus iam perspiciamus, ipsumque nimirum ita esse comparatum, vt ad ipsius solutionem lineae curuae circulo altiores necessario requirantur, adeoque qui sola Geometria plana s. recta et circulo tantum vtentes illud perficere velint, eorum labores plane irritos et inanes esse habendos, firmissima demonstratione euincere possimus. Redit autem huius rei demonstratio maxime ad illam Analyseos finitorum propositionem, qua aequatio tantum iis duabus lineis geometrice construi posse perhibetur, quae se inuicem in tot punctis secare possint, quot vnitates contineat gradus aequationis. Iam cum aequatio, quae conueniat problemati de duarum mediarum proportionalium inuentione, necessario sit cubica, atque

que quidem haec: $z^3 - 2g^3 = 0$; nullas alias apparet ad ipsius constructionem adhibendas esse lineas, quam, quae in vniuersum consideratae, tribus ad minimum vicibus secare se possint, etsi pro illarum mutuo situ et variis conditionibus trium intersectionum duae fiant impossibiles, aut quatuor, sex - - - si in vniuersum consideratis plures tribus intersectiones contingere possint; quod tantum in conicis sectionibus et lineis sublimioris ordinis accidere, notissimum est. Ceterum conff. quae monet Kaestnerus V. S. in Analysi finitor. §. 508.

Sed vt ad veterum hac in re labores potius reuertamur, cum quae perfectior Arithmetice nobis suppeditat varia in computando artificia et commoda, eorum cognitionem tenerent fere nullam; certe ne modum quidem extrahendorum numerorum radicalium, nedum operationes illas per aequationes algebraicas callerent: non potuere aliam inire rationem in soluendo hoc problemate, quam prorsus geometricam. Huc accedit quae fuit veterum in seruandis vniuscuiusque scientiae finibus, remouendoque omnis μεταβάσεως εἰς ἄλλο γένος (vt vocatur ab Aristotele, Analyt. post. lib. I, cap. 7.) crimine summa seueritas et diligentia, qua iustam hominum acutiorum reprehensionem et ca-

ſtigationem non effugere poſſent, ſi qui forte paulo audentiores in Geometria, idoneis propriae perfectionis innixa fundamentis, ad quaeſitorum inuentionem pro conſtructione per lineas calculum ab Arithmetice mutuare, noſtrique problematis inueſtigationem per numeros inire adſpiraſſent. Ad ſola igitur Geometriae auxilia redacti, poſteaquam forſan circa illas mechanicas, vt vocantur, ſolutiones iam plura ſed fruſtra tentaſſent, neque tamen nihilominus huius rei perficiendae ſtudio indefeſſo animique ardore ſatis laudabili inflammati tenerentur: factum eſt, vt hocce perplexum problema ſublimioris eſſe naturae, atque ad ipſius ſolutionem ſolas rectae et circuli operationes nequaquam ſufficere augurati, ad lineas curuas circulo altiores inueniendas et rectius conſtituendas animo delaberentur, atque ita ſimul aditum panderent ad eam, quam vocant ſublimiorem Geometriae partem. Certe quamuis et alias adfuiſſe cauſſas, quae ad haec Geometriae ſublimiora tentanda hominum animos inuitare poſſent, non penitus infitiemur: noſtrum problema prae aliis plurimum contuliſſe, atque eius quidem perficiendi ſtudio ductos eſſe eos, qui primi in noua iſta Matheſeos parte aliquid inuenirent et adornarent, ſatis multis et idoneis antiquitatis mathematicae teſtimoniis confirmatum eſt.

Quae

Quae cum ita ſint, quanti momenti ſit tum ad vniuerſam antiquam Matheſeos hiſtoriam, tum et inprimis ad eam partem, quae de linearum curuarum ſimulque totius ſublimioris Geometriae prima origine incrementisque vberiora exponit, rectius cognoſcendam perſpiciendamque, vt et de noſtri problematis hiſtoria aliquam teneas cognitionem, ſatis ſuperque elucebit. Videmur igitur non eſſe facturi rem penitus ingratam et iniucundam iis omnibus, qui hiſtoriae mathematicae aliquid tribuunt, ſi in *peculiarem huius problematis de cubi duplicatione hiſtoriam* diſquiſitiones inſtituere conemur paulo accuratiores vberioresque. A *prima* autem et *fabuloſa* huius problematis *origine* inde exorſi, quae circa illud *ab antiquioribus Mathematicis* iam *ante Platonem* fuerint tentata, videbimus; tum quam inſignem in *ſchola Platonica* nactum ſit celebritatem et famam, inprimisque quam arcte coniuncta fuerit felicior ipſius tractatio cum primis, quae tum proferrentur in Geometria ſublimiori inuentiones, prolixius recenſebimus; vnde vlterius progreſſi, expoſitis *ſcholae Alexandrinae* et de cubo duplicando meritis eximiis, quae adhuc *ſeriori aeuo* conata ſit hanc in rem nonnullorum Geometrarum ſollertia, narratione deinceps perſequemur.

CAP. II.

FONTES HISTORIAE PROBLEMATIS DE CVBI DVPLICATIONE.

Sed priusquam ad ipſam iam accedamus huius problematis expoſitionem hiſtoricam, vt de fontibus, vnde haec maxime ſit petenda, quaedam antea moneamus, neceſſe erit. Habemus autem auctores hac in re primarios, duumuiros illos, PAPPVM et EVTOCIVM: quorum quidem prior exeunte ſeculo quarto Alexandriae floruit, atque in libris ſuis *collectionum mathematicarum* multas Geometrarum celebriorum inuentiones nimis diſperſas nec ſatis notas colligendo, ipſorumque ſcriptorum ſingula loca ſupplendo et dilucidius explanando de vniuerſa Matheſi eiusque inprimis hiſtoria admodum bene meruit; alter vero Aſcalone, Palaeſtinae ciuitate, oriundus ſeculo ſexto Iuſtiniano imperante in *Archimedem* et *Apollonium* nobiliſſimos illos *commentarios* ſcripſit, qui ſane multa continent ad antiquam Matheſeos hiſtoriam illuſtrandam ſubſidia adhuc fere neglecta. Apud *Pappum* autem ſtatim in *fronte collectionum mathe-*

mathematicarum libri tertii (qui liber fere integer res noſtro problemati maxime adfines et coniunctas tractat) initio ſumto inde a quadam noſtri problematis conſtructione, quam tum temporis propoſuerat aliquis, qui ſibi magnus Geometra videbatur, poſteaquam ipſius examen inſtitutum eſt et ſeuerum et iuſtum, de ſingulari noſtri problematis natura variisque modis, quibus illud tentauerint ſummi Geometrae, quaedam monentur, ſimulque tres ipſius ſoluendi rationes ab Eratosthene, Nicomede et Herone excogitatae integre enarrantur, quibus demum illa ipſius Pappi adiungitur. (Vid. *Pappi* editio latina, per Federicum Commandinum, Bononiae, 1660, pag. 8 ſqq.) Alter Pappi hac de re locus eſt in *libro octauo*, vbi in praefatione huius libri de noſtri problematis vſu in rebus mechanicis loquutus, prop. XI. ſolutionem a ſe inuentam repetitam exhibet. (Vid. pag. 449 et 453. eiusd. edit.) *Eutocius* autem ad *prop.* 2. *lib. II. Archimedis de ſphaera et cylindro*, vbi tota compoſitio problematis de inuenienda ſphaera, quae ſit dato cono vel cylindro aequalis noſtro problemati, vt tali, cuius ſolutio iam aliunde ſatis cognita ſit, ſuperſtruitur; quae fuit huius commentatoris in illuſtrando auctore ſuo inſignis prolixitas eruditionisque oſtentatio, non negligit inde occaſionem

nem ſumere, ad omnem quotquot ipſi innotuerint huius problematis ſolutionum farraginem exponendam, reiecta tantum illa EVDOXI CNIDII. (Vid. *Archimedis editio Oxonienſis*, 1792. p. 133 ſqq.) Huic viro Aſcalonitae igitur inprimis in acceptis referendum eſt, quod praeter quatuor illorum apud Pappum ſolutiones adhuc ſeptem eorumque nobiliſſimorum Geometrarum, videlicet, ARCHYTAE, PLATONIS, MENAECHMI, APOLLONII PERGAEI, PHILONIS BYZANTINI, DIOCLIS et SPORI teneamus varias cubi duplicandi rationes, quas omnes vel ex ipſis horum virorum ſcriptis, vel ex antiquorum hiſtoriae mathematicae auctorum libris, veluti ex Eudemo, omni qua par eſt fide et ſollertia transſcripſiſſe videtur. Sic Eratoſthenis rationem noſtri problematis ſoluendi expoſiturus non adſpernatus eſt eiusdem epiſtolam ſuper hac re ad Ptolemaeum regem ſcriptam integre transſcribere; ita vt, cum in ipſa praeter ipſam ſolutionis expoſitionem nonnulla de noſtri problematis hiſtoria et indole adſpergat auctor ille Cyrenaicus, ſi quaedam inde ſumta in ſequenti noſtra tractatione adhibuerimus, in iis nos non *Eutocii*, ſed potius *Eratoſthenis* auctoritatem ſequuti eſſe videri debeamus. HERONIS autem quam ibi tribuit Eutocius ſolutionem, quamque in huius Geometrae *mechanicis inſtitutionibus* (ἐν μηχανικαῖς

νικαῖς εἰσαγωγαῖς) et in *libello de telis fabricandis* (ἐν τοῖς βελοποιητικοῖς) ita exstare adfirmat; legitur illa adhuc sub finem seruati libelli istius *de telis fabricandis*, qui seorsum editus est *Bernardino Baldo illustratore et interprete*, *Aug. Vind.* 1616; (vbi vid. pag. 42.) atque postea repetitus in *collectione veterum Mathematicorum Theuenoti*, *Paris.* 1693. (pag. 143 sq.)

Post Pappum et Eutocium restat adhuc solus IOANNES PHILOPONVS, Aristotelis commentator ineunte seculo septimo clarus, apud quem, in ipsius quidem commentario ad Aristot. Analyt. post. lib. I, cap. 7, (vid. IO. PHILOPONI *commentarius in Aristot. Analyt. post. Venet. ap. Aldum.* 1534, graece editus, folia 24) etiam aliquam problematis nostri solutionem, tanquam Apollonii Pergaei expositam videre licet, eandem; quam Eutocius potius Philoni Byzantino tribuit. Sed de hac, quae ex Philopono forte oriri possit difficultas, vt et de singulari, quae ibi occurrit lectionis varietas (vid. folia 117, b, sq. eiusd. edit. Aldinae) vberius differendi erit infra locus opportunior.

Ceterum quae adhuc adferri possent ex multis auctoribus, veluti ex *Platone*, *Aristotele*, *Plutarcho*,

tarcho, *Diogene Laertio*, *Proclo*, *Valerio Maximo* aliisque ſingula teſtimonia, quae vel aliqua ex parte noſtri problematis hiſtoriae lucem adfundunt, vel ipſius tantum obiter mentionem faciunt, eorum quoduis ſuo loco indicare et examinare ſatius erit.

Cap. III.

Cap. III.

PRIMA ET FABVLOSA PROBLEMATIS ORIGO.

Si de natura et indole problematis de cubo duplicando paulo accuratius inquirimus, inprimisque locum insignem, quem in Geometria tuetur, satis attente perpendimus: quae forte fuerint hujus problematis origines verique natales, et vnde potissimum factum sit, vt homines ad istam quaestionem agitandam animos applicarent, iam satis superque intelligi posse opinamur. Posteaquam enim homines in Geometria excolenda iamdiu acriter versati, maxime immortali beneficio *Pythagorae*, nobilissimum illud suum theorema de quadratis trianguli rectanguli demonstrantis, eo peruenissent, vt figuras planas similes duplicandi, vel secundum quamuis datam rationem augendi et minuendi nulla iam amplius esset difficultas: ad summum huius artis fastigium et perfectionem adspirantes non potuere non eandem quaestionem transferre ad figuras solidas, atque etiam has data quauis ratione

augendas vel minuendas experiri. Cum autem iam facile cognitum haberent, solida similia eam inter se habere rationem, qualem habeant cubi ex ipsorum lateribus similiter positis (homologis): totam rem ad cubum traducendam esse viderunt, qui si data quauis ratione constitui posset, inde cuiusuis figurae solidae quauis ratione constituendae modum facile repertum iri rati. Quae nostri problematis origo, quantopere ipsius indoli et dignitati, ordinique, quo disciplinae Geometricae partes sese excipiunt, fuerit consentanea, non est, quod prolixius doceamus.

Attamen non tum demum, posteaquam Geometria ipsa maiori ex parte iam esset exculta atque constituta, ad illud problema agitandum primum delata esse hominum ingenia sagaciora; sed potius quam longissime ab ipsis inde Geometriae ferme incunabulis, certe ab illis temporibus, quibus adhuc nulla Mathematum accuratius tractatorum atque in aliquam scientiae formam redactorum apparerent vestigia, iam repetendam esse huius problematis originem, ex testimonio *Eratosthenis* quidem videtur apparere. Tradit enim hic auctor in epistola illa ad Ptolemaeum regem (Vid. Archimedis edit. Oxon. pag. 144), pro insigni qua floruit doctrinae copia

lectio-

lectionisque varietate, quae de prima origine nostri problematis habuerit comperta, expositurus: a veterum Tragicorum quodam introductum esse *Minoa*, antiquum illum Cretensium regem, filio suo *Glauco* sepulchrum exstruentem. Qui cum percontando audivisset illud, quod forma cubi erat extructum, lateribus centenorum esse pedum, pro regali magnificentia nimis exiguum ratus, vt duplo grandius exstrueretur, voluisse, servata tamen cubi forma. Quod vt perficerent, cum Architecti vnumquodque sepulchri latus longitudine duplicandum statuissent, opere peracto eos vehementer errasse palam factum esse. Si enim fuerint duplicata alicuius solidi latera, superficiem quidem quadruplam fieri, solidum vero ipsum octuplum; ita vt tota sepulchri moles, quae fuisset antea pedum cubicorum millies millium (1,000000), ex mente quidem regis bis millenos mille (2,000000) aequare deberet pedes, Architectorum vero ignorantia fieret octies millenorum millium (8,000000). Sic igitur factum esse, pergit Eratosthenes, vt Geometrae primum quaestionem instituerent, quomodo datum solidum, eadem seruata figura possit duplicari, cumque cubum sibi potissimum proponerent, hocce problema *de cubi duplicatione* (τὸν κύβου διπλασιασμὸν) esse appellatum.

 Acci-

Accidit igitur (si huic narrationi fides est habenda) et in nostro problemate, quod in multis aliis grauissimis nobilissimisque inuentis saepius accidisse notum est, vt in primam ipsius tractationem non secundum ordinem, quo disciplinae mathematicae partes inter se connexae et copulatae grauiores sublimioresque leuioribus elementitiisque innituntur atque ex hisce cognoscuntur, progrediendo deducerentur hominum mentes; sed interueniente casu, rebus externis vitae communis, monumento videlicet regis Cretensis filio exaedificando, ansam praebentibus; antequam Mathesis ipsa ad eum perfectionis gradum esset exculta, vt nostri problematis soluendi ratio iam desideraretur.

Ceterum adhuc adnotasse iuuabit, sub illo vetere Tragico, cuius nomen non adfert Eratosthenes, nullum alium intelligendum esse, quam *Euripidem*, tragoediae alicuius fabulam de Glauco exponentis auctorem, cuius duos integros versus ita restituit *Valkenarii* sollertia in Diatribe de fragm. Euripid. pag. 203.

Μικρὸν γ' ἔλεξας βασιλικοῦ σηκὸν τάφου.
Διπλάσιος ἔστω, τοῦ κύβου δὲ μὴ σφαλῇς.

Ex

Ex qua igitur summi huius Batauorum critici coniectura plane refingenda esse videtur lectio et interpunctio, quam exhibet editio Archimedis nouissima Oxoniensis: — διπλάσιος ἔστω. Τοῦ δὲ τοῦ κύβου μὴ σφαλεὶς, διπλασιάζων cet. quamuis codd. manuscripti Parisienses et Mediceus cum hac editione consentiant.

CAP. IV.

HIPPOCRATES CHIVS REDVCIT PROBLEMA DE CVBI DVPLICATIONE IN ILLVD DE INVENTIONE DVARVM MEDIARVM PROPORTIONALIVM.

Sed de hoc monumento Cretenſi, num inde reuera repetenda ſit prima occaſio in cubi duplicationem indagandi, iam dimiſſa omni vberiori diſquiſitione, tanquam vana et ob temporum longinquitatem nimis lubrica et incerta; conuertamur potius ad ea ſecula, vbi maior lux Geometriae adfulſit, ingentique ſtudio, quo Pythagoras eiusque ſectatores hanc diſciplinam amplecterentur, non potuit non mox aditus aperiri ad noſtri problematis tractationem magis idoneam. Nominatur autem inter eos, qui ad cubi duplicationem animos adplicaſſe et quaedam circa ipſam tentaſſe certo perhibentur, primus omnium HIPPOCRATES CHIVS. (Vidd. Eratoſthenes in epiſt. ad Ptolem. Proclus in commentar. in Euclid. elementor. lib. I. pag. 59. edit. Baſil. ap. Heruag. 1533). Qui cum eſſet merca-

mercator, negotiando forte Athenas delatus, et ibi cum Geometris nonnullis Pythagoreis congressus, tanto Matheseos amore fuit inflammatus, vt se totum ei dare constitueret (Vid. Ioh. Philoponus in Aristot. Phys. lib. I. pag. 13 edit. Aldi. Venet. 1535); homo, vt Aristoteles (in Ethic. ad Eudemum, VII, 14) refert, alioquin in rebus quidem vitae communis insigni imperitia et stoliditate praeditus, vnde et fraude publicanorum (πεντηκοστολόγων) Byzantinorum plurimum pecuniae amiserit; in Mathesi vero (quamuis, quod ex Geometria quaestum factitare conatus esset, accusatus e schola Pythagorica insigni ignominia fuerit eiectus; (conf. Iamblichus in lib. III. philos. Pythag. ex vers. Nic. Scutellii, ad calcem libri de mysteriis Aegyptior. pag. 64) tantopere meritis excellens, vt praestantissimis illius aeui Geometris iure possit aequiparari, ipsiusque inuenta, inprimis autem quam constituit lunularum quadraturam longe pulcherrimam, inueniendae circuli quadraturae spe, quae quidem ipsum frustrata est, susceptam, adhuc nostra aetate memoria recolantur grata. (Vidd. Proclus in Euclid. pag. 19 edit. laud. et Simplicius ad Aristot. Phys. I, folia 13 edit. Aldi. Venet. 1526.) Hic, cum in conscribendis Geometriae elementis, quae primus omnium edidisse commemoratur (vid. Procl.

 ibid.),

ibid.), versaretur, fortasse ea re adhuc magis adductus est, vt de cubi duplicatione singulatimque huius problematis natura maiori inquireret studio. Cumque in figuris planis videret peragi duplicationem inuenienda vna media continue proportionali; in quadratis videlicet lineam diametrum (diagonalem), quae sit latus quadrati duplicati, esse mediam continue proportionalem inter latus quadrati dati latusque huius quadrati quadruplicati: figuras solidas vno gradu figurarum planarum dimensione altiores suspicatus, mox vlterius indagando intellexit, solidorum duplicationem inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inniti, quae si inter latus cubi dati ipsiusque octuplicati latus sumerentur, earum minorem fore latus, ad quod constructus cubus sit duplum dati.

Non fieri autem potuit, quin simul de ratione, quam nanciscuntur cubi aliaque solida similia, si ad datae rationis latera homologa constituuntur, altius inquireret, atque in vniuersum de rationum compositione et diuisione iam multa recte perspiceret. Sic igitur habuit sane satis cognitum, duplicatis lateribus solida fieri octupla, triplicatis vigintupla septupla, omninoque solida similia habere rationem triplicatam laterum homo-

logorum; cumque in proportione continua quatuor magnitudinum ratio primae ad quartam ſit ratio triplicata primae ad ſecundam: rationem triplicari, quando duabus datis magnitudinibus adiiciantur duae in proportione continua. Viciſſim autem ſolidorum ſimilium latera homologa habere rationem ſubtriplicatam ipſorum ſolidorum; cumque in proportione continua quatuor magnitudinum ratio primae ad ſecundam ſit ratio ſubtriplicata primae ad quartam: ſubtriplicari rationem, ſumendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas. Conſſ. quae poſtea hac de re docuit *Euclides* element. lib. V, def. 10 et 11; lib. XI, prop. 33. cum coroll.

Quae omnia cum idoneis inuictisque veritatis innitantur momentis, quae nemo poſſit infitias ire: iure ab Hippocrate translatum eſſe videmus problema *de cubi duplicatione* in illud *de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus.*

Quae vero ſit huius translationis (*ἀπαγωγῆς*), in qua ſubſtitiſſe videtur Hippocratis induſtria (non enim aliquam ſoluendi problematis rationem ab ipſo prolatam eſſe legimus) ſingularis vis atque virtus, mox elucebit. Quamuis enim illud nouum problema et ipſum ex ſola Geome-

 tria

tria elementari nequaquam perfici posset, vel, vt more antiquiorum Geometrarum loquamur, non ad problemata plana posset referri: tamen cum multo magis appareret idoneum aptumque, quo minus per tentamina rationesque quas vocant mechanicas satis facile perficeretur; cumque praeterea, esse ipsum viam propriam et singularem, qua ad cubi duplicationem perueniri posset, intelligeretur: adeo placuit omnibus, qui postea ad hanc quaestionem accesserunt Geometrae, vt quam Hippocrates reducendo hoc problemate monstrauerit eximiam sollertiam mentisque sagacitatem. debita vtilitatis laude semper sint venerati, vtque problema ipsum nouo nomine de *inueniendis mediis continue proportionalibus* a plerisque fuerit celebratum.

Ceterum eiusmodi *abductionis* (ἀπαγωγῆς), quae est transitus a proposito theoremate vel problemate ad aliud, quo cognito aut comparato propositum quoque perspicuum est, *inuentorem* habitum esse hunc *Hippocratem Chium*, qui quidem illam ad expediendas difficiliores paulo et impeditiores propositiones primus adhibuerit, ex loco Procli pag. 59. ed. Bas. patet. (πρῶτον δὲ φασὶ τῶν ἀπορουμένων διαγραμμάτων τὴν ἀπαγωγὴν ποιήσασθαι Ἱπποκράτην τὸν Χιὸν.)

Cap. V.

Cap. V.

ORACVLVM APOLLINIS CVBI DVPLICATIONEM PROPONIT. PLATONIS IN IPSAM STVDIA.

Tempore non multo post, cum in Graecia litterae Mathematicae in dies maiora caperent incrementa, atque post immortalia *Pythagoreorum* de iis merita maxime Platonis eiusque amicorum et discipulorum studiis mirum in modum colerentur perficerenturque: accidit, vt nostrum problema *in* Platonicorvm vt vocatur Schola per satis longum tempus magnam adquireret celebritatem, et exercitando Geometrarum ingenia ad praeclarissima et celeberrima inuenta deduceret et quasi aditum panderet. Cuius rei occasionem maxime praebuisse dicitur, quod numinis Delii oraculo huius problematis accuratior tractatio Geometris fuerit proposita et maiorem in modum commendata. Cum enim, vt eam, quae singularis de hac re narratio exstat apud *Plutarchum* in libro de Genio Socratis, pag. 579. tom. 2. ed. Francof. sequamur, apud Delios,

vt

vt in tota Graecia, lues pestifera diu grassaretur: his Apollinem consulentibus, quomodo contagium sopiri posset, hocce insolens oraculum deus edidit: si aram dei, quae in Delo erat cubica, duplicassent, Deliis et aliis Graecis finem fore calamitatum praesentium. Cuius oraculi cum sententiam assequi non possent, et in altaris structura ridicule iis hoc euenisset, vt pro dupla ara ignoratione proportionis quadruplam excitarent, vel cum, vt *Philoponus* ad Aristot. anal. post. fol. 24. ed. Venet. 1534 refert, arae alia ara aequali super imposita ipsam quidem duplicassent, sed pro cubo, qualis eius erat forma, prisma oblongum constituissent; ideoque cum morbo interim nihilo secius instante Apollinem denuo sciscitati, vt in ara duplicanda eius forma cubica esset seruanda, edocerentur: de hac difficultate expedienda solliciti et consilii inopes legatis missis Platonis, ista aetate inter omnes Geometras ita vt Philosophos vere principis, opem implorauerunt. Quibus ille: "Deum hanc arae duplica„tionem nullo modo requirere aut desiderare; „sed ludi ab ipso Graecos, qui Geometriam ne„gligentius haberent, iisque praecipi, vt bella „aduersati litteris serio se dedant." Ceterum de conficienda cubi duplicatione ipsa, quam sola inventione duarum continue proportionalium inter

duas

duas datas niti adfirmabat, eos Eudoxum Cnidium aut Heliconem Cyzicenum, qui erant ipſius diſcipuli et familiares, adire voluit. Sic igitur factum eſſe narratur, vt iſto tempore graviſſimo Platonis admonitu et hortatu impulſi plures ex ipſius diſcipulis et familiaribus ad tentandam noſtri problematis ſolutionem ſtrenue accederent, ſimul et religione quadam in illud converſi, problemaque ipſum, quod Apollinis ipſius auctoritate propoſitum eſſe crederetur, poſtea nomen inſigne Deliaci nanciſceretur.

Non prorſus ſilentio praetereunda hic eſſe videtur mira quaedam *Valerii Maximi*, lib. VIII. c. 12. ad eandem hanc rem reſpicientis, a noſtris auctoribus diſcrepantia, qui exemplis virorum praeclariſſimorum probaturus, *optimis artium magiſtris concedendum eſſe; hanc cogitationem attigiſſe* adfirmat *et Platonis eruditiſſimum pectus, qui conductores arae Deliacae de modo et forma eius ſecum ſermonem conferre conatos, ad* Evclidem *Geometram ire iuſſerit, ſcientiae eius cedens, immo profeſſioni.*

Sed cum Euclides, ſummus ille Geometra et elementorum ſcriptor clariſſimus, Platone ſit multo iunior; Euclides vero Megarenſis Philoſophus, qui Platoni aetate fuit aequalis, ex Ma-

thesi penitus nullam nactus sit gloriam, in textu tamen Valerii Maximi nomen Euclidis (licet pro hoc illud Eudoxii nonnulli legere voluerint) videatur esse genuinum: Valerium forsan rem istam, vt saepius ex sola memoria recitantem de vero nomine huius Geometrae incertum, neglecta temporum ratione celeberrimi illius Geometrae nomen parum circumspecte arripuisse, iam a Torrenio aliisque viris doctis ad h. l. recte obseruatum est. Quod vero multo grauius in ipsum Valerium adhuc moneri possit, est sane hoc, quod ipsum Platonis exemplum ad probandam hanc sententiam, optimis artium magistris esse concedendum, cuius caussa proprie adlatum sit, vim plane nullam habere videtur. Quemadmodum enim Plato, qui fuit Mathematicorum suae aetatis facile princeps, alteri in Geometriae cognitione cessisse neqnaquam dici potest: sic ipsum, non quasi primas concederet Eudoxi et Heliconis scientiae, sed potius, vt, quae erat singularis huius summi viri erga discipulos et familiares suos beneuolentia et humanitas, horum ingenia hac re, cuius expediendae rationem aliquam per instrumenta ad vsum vitae communis satis idoneam et ipse ignorare nullo modo potuit, ipsique tubui mox videbimus, exerceret atque instigaret, iisque simul inter Graecos ex profundiori

diori Geometriae cognitione famam aliquam et laudem parandi daret occasionem, ad eos ablegasse legatos Delios, ex prolixiori et accuratiori Plutarchi narratione satis superque apparet; ita vt Valerius, quam in colligenda et vndique consarcinanda ista ingenti dictorum factorumque memorabilium copia nonnunquam admiserit negligentiam et leuitatem, ipsius documentum prae aliis insigne in isto loco edidisse habendus sit.

Sed dimissa hac a proposito nostro fere aliena de loco Valerii Maximi crisi, reuertamur iam ad narrationem ipsam, quae de Apollinis oraculo ad diligentiorem nostri problematis tractationem Graecis Geometris commendandam edito exposita est; de qua, num ad veritatem sit composita, an prorsus efficta, omne iudicium vnicuique liberum est relinquendum. Certe, si ad Platonem ipsum respicimus, quod fuerit eius Mathematum colendorum augendorumque studium indefessum et paene increditum, simulque, qui fuerit istis temporibus singularis Geometriae status et conditio, perpendimus: non fuisse quidquam, quod ad tentandam nostri problematis solutionem non inuitaret nec grauissime admoneret, facile apparebit. Cum enim Geometria, cuius theoremata et problemata, quemadmodum singula

diuer-

diuersis temporibus erant inuenta et demonstrata, singulatim quoque tradita, initio fere omnem respuerant coniunctionem inter se arctiorem et disciplinae copulam, tandem coepisset maxime inde ab Hippocrate Chio iustam disciplinae formam habitumque induere, pluresque iam in ea supplenda consummandaque sedulo nec sine infelici successu fuissent versati: Plato praeter innumera ipsius de tota Mathesi merita et hoc sibi vindicasse dicendus est, vt, dum corporum quinque regularium, quae a Pythagora inuenta esse traduntur, constitutionem perficeret, ipsorumque mutuam relationem accurate doceret, totius Geometriae ambitum penitus absoluisse, ipsique supremam quasi coronidem (quae vt omnis elementaris institutionis finis extremus postea fuit constituta) superimposuisse videatur. (Conf. Proclus, pag. 19 sq.) Huic igitur studio deditus cum in pertractanda solidorum doctrina versaretur, non potuit non fere vbique offensum se videre et circumscriptum grauissimis difficultatibus ex non inuenta cubi duplicatione oriundis; ita vt de Geometrarum Graecorum in hac re negligentia et ignorantia ipsis non condonanda grauissime acerbissimeque conquestus, ad hoc problema soluendum et ipse animum adplicaret, et familiares discipulos suos omni qua valuit apud ipsos auctoritate excitaret

et

et prouocaret. Hac de re prae aliis inſpicere iuvat locum *Platonis in lib. VII. de republica* (pag. 701. ed. Francof. 1602), vbi ex diſciplinis liberalibus, quibus ciuium animos mature imbuendos eſſe vult, poſt Geometriam, quam ſecundo loco diſcendam proponit, Aſtronomiam commendare exorſus, mox retrogreditur, atque Geometriae aliam aliquam ſcientiam (videlicet Stereometriam) ſtatim adiiciendam docet, quam demum quarto loco excipiat Aſtronomia. Illam autem tertio loco diſcendam (quam circa cuborum augmentum, atque id, quod profunditatis particeps eſt, verſari dicit; περὶ τὴν τῶν κύβων αὔξην καὶ τὸ βάθους μετέχον) nondum repertam videri monet, nec, cum a nulla ciuitate in honore habeatur, ipſique Geometrae in tentanda hac re ob inſignem ipſius difficultatem non ardenter verſentur, admodum ſperandum eſſe, fore vt mox reperiatur. Indigere praeterea eos, qui ipſam perquirere velint, duce quodam et praeſide (ἐπιστάτου), qui tamen et aegre poſſit inueniri, cuique, ſi adſit, reliqui faſtu elati nequaquam ſint obtemperaturi. Sin autem aliquando futurum ſit, vt tota ciuitas iſtas diſquiſitiones non amplius contemnat et improbet, ſed potius commendet et tueatur: tum demum, non deficientibus Geometrarum vulgi gratiam ſectantium ſtudiis, vt iſta

adſidue et ſumma contentione diſcuſſa clariora fiant, exſpectari poſſe.

Non igitur opus fuiſſe videmus, ſolemni Apollinis ipſius interuentu, vt de diligentiori noſtri problematis tractatione admoneretur Platō; qui tamen, ſimulac ipſi innotuit hocce dei oraculum, et hac opportunitate, quam ipſi ſuppeditabat religio, vſus eſt ad eo magis aliis commendandam de noſtro problemate ſóluendo diſquiſitionem; niſi forte et ipſius commento ſollerti hocce oraculum, quo nihil magis commouere potuit hominum animos, quoque numen ipſum Delium hiſce Geometrarum ſtudiis quaſi praeſidere (ἐπιστατεῖν) et adeſſe, nec leuem ipſorum vtilitatem ſpondere declararetur, procuratum fuiſſe coniicere velis.

Cap. VI.

INDE MAXIMA INCREMENTA CAPIT GEOMETRIA.

Accedit quod, poſteaquam ipſe ad noſtrum problema ſtudio delatus eſſet, atque in explorandis diſcutiendisque, quibus obſepta videretur illius inueſtigatio difficultatibus, ſedulo verſaretur: ingenio ipſius perſpicaciſſimo ſagaciſſimoque ſubito patuit proſpectus longe ſplendidiſſimus, ſpesque obuerſata eſt longe ſuauiſſima maximeque exoptata de amplificanda nouisque acceſſionibus et incrementis augenda Geometria. Quantum enim retroſpicere licet in antiquiora Matheſeos tempora, quae a Geometris adhuc tractata erant problemata vel theoremata, fuere illa quidem maxime eius naturae indolisque, vt ad ipſorum compoſitionem aut demonſtrationem vſus rectae lineae et circuli ſufficeret; et ſi interdum quoque quaedam iam agitarentur, quae iuſtis hiſce inſtrumentis Geometricis, cum praeter circulum adhuc aliarum curuarum operationes ſupponerent, fruſtra perficienda tentarentur: videtur tamen haſce dif-

ficultates non satis perspexisse, et de efficiendis istarum curuarum constructionibus parum sollicita, solo circulo tractando adhuc substitisse antiquiorum Mathematicorum sollertia. Recte igitur traditur Plato fuisse primus, qui hac de re rectiora intelligeret, atque ad amouendas difficultates, quibus non minus in nostri problematis, quam in aliorum, veluti illius de anguli trisectione, solutionibus acerbissime laedi perspiceret Geometricarum legum seueritatem, nouam istam et sublimiorem partem Geometriae adiungendam ipse paulo intentius moliretur. Quamuis autem haec ipsius studia non id adsequerentur, vt huius nouae disciplinae rudimenta ipse constitueret et absolueret: tamen huic viro sagacissimo in vniversum de finibus, quibus Geometria, quae adhuc tantum exculta erat *elementaris* ab illa *sublimiori*, vt postea appellata est, esset discernenda; ita quidem, vt prior illa tractandis solis figuris rectilineis circuloque circumscriberetur, posterior vero ad ceteras lineas curuas adhuc inueniendas esset comparanda, iam satis cognitum et constitutum fuisse, aegre dubitari potest. Vsus est autem ad excolendam et perficiendam istam nouam Geometriae partem maxime amicorum discipulorumque suorum industria, quibus, quae erat erga eos summa huius Academiae parentis humanitas

et

et beneuolentia, saepius videtur auctor fuisse, vt istud negotium extremo susciperent conatu, cumque problema de *cubo duplicando* inprimis eo deducere probe intelligeret, exponendis ipsius soluendi difficultatibus studia ipsorum acuere atque maiorem in modum instigare nunquam desiit. Pertinet huc locus inprimis praeclarus *Plutarchi in Sympos.* (pag. 718, tom. 2, ed. Francof. 1620), vbi Plato narratur reprehendisse Archytam, Eudoxum et Menaechmum, qui cubi duplicationem aggrederentur in instrumenta et mechanica opera conuertere, tentarentque hoc modo duas medias datis duabus proportionales inuenire; perdi hoc pacto, adfirmans, et corrumpi Geometriae bonum, rursus ad sensilia refugientis, neque sursum se efferentis et apprehendentis aeternas et corporis expertes imagines.

Cum denique ad auspicandam primam huius nouae geometricae disciplinae tractationem maximi esse momenti, omniaque primum eo redire cognosceret, vt certa ederetur ratio, qua ortus et constructio istarum linearum curuarum constitueretur et determinaretur: ipse et ita adiuuisse habendus est discipulorum suorum mentes sollertes, vt figuras solidas quadam ratione secandas ad harum linearum curuarum originem et con-

 structio-

structionem certam efficiendam ipsis commendaret. Haec igitur est illa nobilissima et in historia Matheseos huius aeui tam saepe celebrata SOLIDORVM SECTIO, quae Platone auctore et moderatore nostro autem problemate ansam praebente hanc cepit originem, fuitque quasi portus et limen, quo in sublimioris Matheseos augustum et sacratum penetrale mox descenderetur.

Videtur autem fere eo restringenda esse quae hac ex re ad Platonem ipsum redundet laus atque gloria, prorsusque nihil amplius elici posse ex verbis illis *Procli* pag. 19. τὰ περὶ τὴν τομὴν ἀρχὴν λαβόντα παρὰ Πλάτωνος. quibus quidem verbis seducti nonnulli viri docti Platonem de istis altioribus Geometriae quaestionibus indagando adeo processisse voluerunt, vt ipse *ad sectiones* quas proprie dicunt *conicas excogitandas* et *constituendas* sit delatus; opinio prorsus vana, nullis quidem idoneis antiquitatis testimoniis, sed soli minus accuratae istius loci interpretationi innitens, vt vnicuique paulo accuratius inquirenti mox elucebit. Quisque enim facile concedet, verbis illis τὰ περὶ τὴν τομὴν proprie nihil aliud significari, quam solidi sectionem in vniuersum. Atque isto tempore a Platonicis in figuris solidis omnis generis secandis periculum esse factum, ad

varia

varias inde efficiendas linearum curuarum species, non autem conos solos hunc in finem adhibitos esse, satis superque verosimile est, confirmaturque ex eodem *Proclo* pag. 29, vbi ad Euclid. def. 4. linearum secundum Platonem diuisio exponitur, ex qua plures linearum curuarum, quae solidorum sectionibus oriuntur, species huic viro summo iam cognitas fuisse apparet *). Ex hac autem notitia, quam Plato habuisse ibi perhibetur de pluribus, quae solidorum sectione efficiantur, curuarum generibus, si quis forte iam argumentari velit, ab ipso igitur constitutas esse et istas lineas curuas, quae proprie sectiones conicae vocantur, quam praepropera sit talis coniectura, quisque videt. Vt denique totam hanc controuersiam semel dirimamus, aduersatur isti opinioni penitus alter locus eiusdem *Procli* pag. 31, vel potius *Gemini* (hunc enim ibi exscribit Proclus), scriptoris historiae mathematicae summae auctoritatis, qui vero ibi sectionum conicarum inuentionem *Menaechmo* verbis vindicat satis claris et perspicuis. Sed cum iste locus adhuc non sufficienter sit illustratus, variasque videri possit admittere dubitationes, in ipsius crisin accuratiorem paululum digredi non erit alienum.

 Exscrip-

*) Conf. etiam Eutocius ad Apollonii conicor. lib. I. prooem. pag. 12, edit. Halleyi, Oxon. 1710.

Exſcripſit autem Proclus in illa tractatione de linearum generibus ad Euclid. def. 4. ſententiam. Gemini hac de re expoſiturus, hanc integram ipſius ῥῆσιν, quae variis laudatis linearum generibus, poſteaquam deuentum eſt in illud curvarum, quae ſolidorum ſectione gignantur et in conicas et ſpiricas diſpeſcantur, ita fere definit: ὑπονοεῖσθαι δὲ (ſubint. φησὶ Γεμῖνος; oratione obliqua enim inferuntur a Proclo verba Gemini) ταύτας τὰς τομὰς, τὰς μὲν, ὑπὸ Μεναίχμου τὰς κωνικὰς — τὰς δὲ ὑπὸ Πέρσεως — *excogitatas autem eſſe iſtas ſectiones, illas quidem, conicas ſcilicet a Menaechmo — has vero a Perſeo.*

Ad infringendum autem hocce ſatis planum et perſpicuum Gemini teſtimonium, quae forte proferri poſſe videntur, redeunt potiſſimum eo, vt ſupponatur, Geminum nulla alia auctoritate hiſtorica, quam ſola illa verſus iſtius Eratoſthenis: μηδὲ Μεναιχμίους κωνοτομεῖν τριάδας, commotum eſſe, vt ſectionum conicarum inuentionem Menaechmo tribueret, ideoque iſtum verſum probandae huius ſententiae cauſſa ab ipſo eſſe adiunctum; ex verſu autem illo, cum Μεναίχμιαι dici poſſint ſectiones conicae non ſolum, quatenus a Menaechmo ſint excogitatae, ſed et

quate-

quatenus tantum insignem in ipsis excolendis Menaechmus posuerit operam, vel quatenus ipsas potissimum adhibuerit ad perficiendam cubi duplicationem, nihil iuste peti posse, ideoque totam illam quaestionem de tribuenda Menaechmo conicarum sectionum inuentione relinqui penitus incertam. Sed sunt plura et satis idonea, quae contra moneri debent. Vt enim adhuc silentio praetereamus, illud sagacitati et perspicaciae Gemini sane videri tribuendum esse, vt ipsum sola interpretatione tam ambigua versus istius ad tanti momenti inuentionem Menaechmo simpliciter vindicandam nequaquam induci potuisse iudicemus; ideoque fieri multo verosimilius, laudatum esse a Gemino istum versum, non quidem vt inde confirmaret sententiam suam, sed potius vt secundum illam sententiam suam verba illa Eratosthenis notissima, nonnullis vero iam tum obscura intelligenda esse doceret: omnes prorsus tolluntur illae obiectiones, si perpendimus, totam ῥῆσιν: ὅ καὶ Ἐρατοσθένης – – – – τριάδας, quemadmodum et hanc: ὅς καὶ τὸ ἐπίγραμμα – – – – – ἱλάσατο, non esse Gemini ipsius, sed potius a Proclo verbis Gemini intermixtam; quod et fatebitur, qui paulo accuratius totum illum locum inspicere non neglexerit, moremque, quo Proclus citare

 et

et flosculis doctrinae suae saepe satis alienae interpolare solet auctores suos, bene norit.

Quae cum a nobis ita sint disputata, facile elucebit, ne in suspicionem iniustitiae incurrere palmamque, quae fere vnica Menaechmi adhuc est seruata, ipsi detrahere, et in Platonis tot laudum frondibus cumulatum caput conferre videamur, hocce discrimen statuamus, necesse esse: *Platoni* quidem, quatenus primum excitauerit discipulorum et amicorum suorum industriam, ipsorumque conamina consiliis suis sit moderatus, sublimioris Geometriae originem et prima incrementa omnino in acceptis esse referenda; Menaechmo vero earum, quae proprie vocantur sectiones conicae, inuentionem et constitutionem accuratiorem nequaquam esse denegandam. De quibus autem Menaechmeis coni sectionibus vberius differendi, cum nobis mox alia magis idonea obuentura sit occasio, eas iam missas faciamus, reuertamurque illuc, vnde egressi sumus, cum nempe Platonem, de nostro problemate indagantem, primum aditum ad sublimiorem mathematicam cognitionem pandisse doceremus.

Cap. VII.

Cap. VII.

PLATONIS RATIO INVENIENDARVM MEDIARVM PROPORTIONALIVM.

Quamuis autem Plato tam vehementi excolendae huius ſublimioris Geometriae teneretur ſtudio et ardore, inprimisque ſi quas forte Geometricas leges a diſcipulis ſuis videret violatas, harum exiſteret tam ſeuerus et acer vindex: ipſum ad perficiendum noſtrum problema tamen eam iniiſſe rationem, quae, cum ſit prorſus *mechanica*, geometricae perfectioni nequaquam convenire poſſit, eſt ſane, quod mireris. Videtur igitur Plato vel iuueniles ſuas operas huic rei impendens ipſam conſtituiſſe, vel (quod eſt veroſimilius) multo ſerius, poſteaquam iam Archytas rationem edidiſſet ſuam adeo difficilem (vid. Diog. Laert. lib. VIII. ſegm. 83; pag. 542. edit. Meibomii, Amſt. 1692), hominum nonnullorum deſideriis tandem cedens, hoc vnice ſibi habuiſſe propoſitum, vt paulo ſimpliciorem faciliorемque promulgaret ſoluendi huius problematis rationem, quae

manua-

manualibus operationibus inprimis accommodata vſui hominum in rebus vitae communis inſeruiret; qua vero inuentione literas geometricas ipſas aliquantum a ſe promotas eſſe vt opinaretur, ita longe abfuit, vt potius hisce ſuis veſtigiis inſiſtere familiares ſuos hac de re inquirentes nequaquam pateretur. Conf. l. l. Plutarchi in Sympoſ. Vnde forſam et factum eſt, vt iſta Platonica ſolutio non magnam adquireret celebritatem, atque mox iam a multis ignoraretur vel ſilentio praetermitteretur: quod ſane vrgere non omittet, ſi quis forte voluerit genuitatem iſtius Platonicae ſolutionis in dubium vocare. Praeter Eutocium enim, apud quem ipſam expoſitam legimus, nemo inuenitur, qui ſingularis alicuius rationis, qua Plato ipſe cubi duplicationem perficiendam tradiderit, aliquam faciat mentionem. Certe Eratoſthenes ipſam plane ignoraſſe videtur. In epiſtola enim illa ad Ptolemaeum, vbi antiquorum hac in re recenſet conamina, inprimis reſpectu habito ſingularis ipſorum manibus efficiendorum facilitatis, inter Archytam, Eudoxum, et Menaechmum, quos omnes rem ſane demonſtrando aperire potuiſſe adfirmat, ſolum ait eſſe Menaechmum, cuius ratio quodam modo quamvis et ipſa ſatis operoſe vſui poſſit accommodari; Platonis autem inuentionem, quae ob inſtru-

cf. Eratosthenica ed. Bernhardy p. 170.

mentum

mentum peculiare adhibitum inprimis sustinuisset comparationem cum illa ipsius Eratosthenis, ibi prorsus silentio praeterit. Similiter et Pappus pag. 7. ex iis, qui hanc rem in instrumenta transferre sint conati, laudat tantum Eratosthenem, Heronem, et Philonem Byzantinum. Accedit quod ipse Eutocius, quod alias facere plerumque non negligit, vnde hanc Platonis rationem desumtam teneat, nequaquam indicat. Quae omnia si simul colligimus, non alienos nos esse fatemur, quin illam, quae Platonis nomine circumfertur problematis nostri solutio, huic summo viro etsi non penitus abiudicemus, certe illius genuinitatem vocemus in dubium. Sed ne tali disputatione forsan non omnibus aeque opportunae diutius immoremur, ad ipsam, qualem aqud Eutocium legimus solutionis rationem, exponendam iam conuertamur.

* * *

Problema.

Datis duabus rectis, duas medias proportionales inuenire in proportione continua.

Solutio.

Sint datae ad angulos inter se inuicem rectos duae rectae AB, BΓ, inter quas Fig. 1 et 2.

duae

duae proportionales mediae ſint inueniendae. Producantur in directum verſus puncta Δ, E; et conſtruatur angulus rectus ZHΘ, in cuius vno crure ZH per aliquem canalem, qui ſit in ipſo, regula KΛ ita moueatur, vt cruri alteri HΘ parallela maneat. Hoc vero efficietur, ſi et alia regula intelligatur ipſi ΘH inſerta eſſe cruri ZH parallela, qualis eſt ΘM. Cum enim canale diſſectae ſint deſuper ſuperficies ZH, ΘM canalibus ſecuriculatis [i. e. forma ſecuriculae edolatis] compactis vtique in regulam KΛ ligneis clauis, iisdemque in illos canales immiſſis: KΛ ipſi HΘ parallela continuo mouebitur. His igitur confectis ponatur anguli ZHΘ crus vtrumbilet HΘ ita, vt contingat punctum Γ; et transferantur angulus et regula KΛ vsque eo, donec, tranſeunte crure HΘ per punctum Γ, punctum H quidem ſuper rectam BE cadat; regula vero KΛ, ab vna parte, puncto ipſius K, rectam BΔ, ab altera vero parte punctum A contingat: Ita vt, quemadmodum eſt in figura, angulus quidem rectus eundem habeat ſitum, quem ΓEΔ; regula vero KΛ eundem, quem recta ΔA. Quae ſi ita fiant, quod propoſitum eſt conficietur.

Demon-

Demonstratio.

Est enim Ang. AΔE = Ang. ΔEΓ = Recto; [recta autem BΔ ipsi AE, et BE ipsi ΓΔ ad angulos rectos]. Vnde erit ΓB : BE = EB : BΔ = ΔB : BA. [Vid. coroll. prop. 8. lib. VI. elementor. Euclidis].

Cap. VIII.

Cap. VIII.

ARCHYTAS.

Illis igitur grauiſſimis et vehementiſſimis Platonis ſui deſideriis ſatisfacturus, omnium primus, qui aliquám noſtri problematis ſolutionem perfecerit, fuiſſe perhibetur Archytas, clariſſimus ille Pythagoreorum philoſophus, Tarentinorumque per multum temporis ſummus imperator (στρατηγός), qui quam cum Platone contraxerat amicitiam intimam ſuauiſſimo eodemque eruditiſſimo epiſtolarum commercio admodum ſouebat. Nobilitata eſt autem haec ipſius ſolutio maxime eo, quod in ipſa motum quendam, quo in ſuperficie ſemicylindri curua deſcriberetur, quae interſecta motu lateris hypotenuſeos trianguli rectanguli conum efficientis conſtitueret mediarum proportionalium vnam, concipiens, quemadmodum primus methodum a Mathematum principiis mutuatus Mechanica perficere docuiſſet, ſic rurſus motum, quem dicunt *organicum*, a Mechanicis mutuatus in Geometriam introducere primus auſus ſit, teſte *Diogene Laertio*, lib. VIII, ſegm. 83

(vbi

(vbi cum Kuehnio μαθηματικαῖς pro μηχανικαῖς legendum est). Conf. etiam *Plutarch. in Marcello*, pag. 305, tom. I. edit. Francof. Quamuis autem consilium, quod hac re nouata maxime spectasse videtur Archytas, vt videlicet mediarum proportionalium inuentio manualibus operationibus magis accommodaretur, minime est assequutus hac sua ratione (Ἀρχύτεω δυσμήχανα ἔργα κυλίνδρων, dicit Eratosthenes): elucet tamen ex ipsa sublime et excelsum ingenium illius, quem celebrat poeta maris et terrae numeroque carentis arenae mensorem, Aërias tentasse domos animoque rotundum percurrisse polum. Vid. Horat. lib. I, od. 28. Nactum esse etiam ipsum, quemadmodum ob ceteras inuentiones ad vitae communis vsum inprimis comparatas magna apud homines floruerit gratia, ex huius rei inuentione maximam laudem atque admirationem, monet *Vitruuius* lib. IX, c. 3.

Ratio autem *Archytae*, qualis apud Eutocium ex Eudemo descripta legitur est fere haec:

* * *

Sint datae duae rectae ΑΔ, Γ, inter quas oporteat duas medias proportionales inuenire. Fig. 3.
Circa maiorem ΑΔ describatur circulus ΑΒΔΖ; eique inscribatur ΑΒ ipsi Γ aequalis; quae quidem producta concurrat in puncto Π cum recta contingente circulum

 in

in puncto ΔΛ iungaturque BEZ parallela ipsi ΠΔ. Iam intelligatur semicylindrus rectus esse semicirculo ABΔ superimpositus; rectae AΔ vero semicirculus rectus in semicylindri parallelogrammo positus. Hic igitur semicirculus, si, manente diametri termino A, circumagatur a puncto Δ versus B, cylindricam superficiem secabit, et lineam quandam in ipsa describet. Rursus vero si, manente AΔ, triangulum AΔΠ circumagatur motu, qui sit illi semicirculo circumacto contrarius, conicam superficiem efficiet rectâ AΠ, quae videlicet circumacta in puncto aliquo cum linea cylindrica [h. e. cum linea, quae in superficie cylindrica motu illius semicirculi descripta est] concurret; simul vero et punctum B [quod est in recta AΠ] semicirculum in superficie conica describet. Habeat autem, vbi primum hae lineae concurrunt, promotus quidem semicirculus eundem situm, qualem ΔKA; triangulum vero ex aduerso circumactum eundem, qualem ΔΛA; punctum denique, in quo concurrunt, sit K. Semicirculus vero, qui a puncto B descriptus est, BMZ; ipsiusque et circuli BΔZA communis sectio, BZ: et a puncto K ad planum semicirculi BΔA ducatur normalis; quae vtique

que, cum cylindrus rectus sit, in circuli circumferentiam cadet. Cadat, et sit KI: et quae a puncto I ad A iungitur recta cum ipsa BZ concurrat in puncto Θ; recta AΛ vero cum semicirculo BMZ in puncto M: iunganturque rectae KΔ, MI, MΘ.

Quoniam igitur vterque semicirculus ΔKA, BMZ est rectus ad subiectum planum, communis quoque ipsorum sectio MΘ ad angulos rectos est ipsi plano circuli; vnde MΘ recta est et ad BZ. [ex prop. 19. lib. XI. elem. Euclid.] Est igitur Rectang. ΘB, ΘZ = Rectang. ΘA, ΘI = Quadr. MΘ. [Est enim ex prop. 35. lib. III. Euclid. Rectang. ΘB, ΘZ = Rectang. ΘA, ΘI; et BΘ: ΘM = MΘ: ΘZ, ex p. 13. l. VI. Eucl. ideoque per p. 17. l. eiusd. Rectang. ΘB, ΘZ = Quadr. MΘ]. Hinc Triang. AMI ∽ Triang. MIΘ ∽ Triang. MAΘ, et Ang. IMA = R. Est autem et Ang. ΔKA = R. [ex p. 31. l. III. Eucl.] Parallelae igitur sunt KΔ, MI; [ex p. 28. l. I. Eucl.] et erit AΔ: AK = KA: AI = IA: AM, propter triangulorum similitudinem. [Est enim AΔ: AK = AI: AM, ex p. 2. l. VI. Eucl.; et AΔ: KA = KA: AI, ex coroll. p. 8. l. VI. Eucl.] Itaque cum sit AM = AB = Γ; datis duabus AΔ, Γ, duae mediae proportionales inuentae sunt.

Cap. IX.

EVDOXVS CNIDIVS.

Eidem praeceptoris et amici auctoritati, cui Archytas, obtemperaturus in augenda et perficienda tota ista solidorum doctrina, et inprimis in inueniendа cubi duplicatione multum operae posuisse, huiusque efficiendae peculiarem rationem a se inuentam promulgasse narratur EVDOXVS CNIDIVS, Aeschinis F. celeberrimus ille Octaëteridis auctor, qui et elementorum geometricorum libros scripsit, doctrinamque de proportionibus insigni tractauit sollertia, inuentisque admodum auxit. Conff. Diog. Laert. lib. VIII, segm. 86 sqq; Proclus, pag. 19; et maxime Archimedes, qui in praefatione libri I. de sphaera et cylindro ad Dositheum (pag. 64. ed. Oxon.) grauissima Eudoxi merita de promouenda solidorum doctrina praeclarissimo exornat testimonio. Indicat enim ibi, se in hosce libros de sphaera et cylindro plura recepisse, quae Eudoxus circa solida iam sit contemplatus; veluti illud, *quamlibet pyramidem partem esse tertiam prismatis, quod eandem ac pyramis basin*

basin habeat, eandemque altitudinem; itemque illud, *quemlibet conum partem esse tertiam cylindri, qui eandem ac conus basin habeat, et altitudinem eandem:* quorum theorematum inuentionem Eudoxo in acceptis referendam esse, verbis perspicuis adhuc declarat.

Ad nostrum problema autem soluendum vsus est Eudoxus quibusdam lineis curuis, ab ipso maxime eum in finem excogitatis, et singulari libello explicatis; quarum vero qui fuerit ortus, quae peculiaris natura et indoles, prorsus ignoratur; nisi quod ipsas et solidorum sectione effectas fuisse, recte coniicere possis ex Proclo, pag. 19, vbi quae circa solidorum sectionem (ad lineas curuas circulo altiores efficiendas institutam) inde a Platone originem cepissent, ab Eudoxo aucta et promota esse leguntur. Ceterum quod Eratosthenes in epigrammate illo harum linearum curuarum auctorem vocat θεουδῆ, quam in ipsis inueniendis et constituendis monstrauerit Eudoxus sagacitatem et sollertiam maximopere commendare videtur.

In adhibendis autem istis lineis curuis ad nostri problematis solutionem admodum male euenisse Eudoxo, docemur ab Eutocio, qui (ad Archimed. de sph. et cyl. lib II, prop. 2. pag. 135.

ed. Oxon.), cum in multorum illustrium virorum scripta incidisset, quibus plures huius problematis conficiendi rationes traderentur, solam illam Eudoxi Cnidii reiiciendam putauit. Adfirmat enim ibi, cum per lineas curuas cubi duplicationem se inuenisse in proemiis contendisset Eudoxus, in demonstratione tamen nullas lineas curuas adhibitas esse, satis perspicuum fieri; insuperque hoc insigne ab ipso commissum esse, vt discreta proportione tanquam continua vsus sit. Quas sane grauissimas reprehensiones, quomodo subire potuerit diuinum Eudoxi ingenium, cum iure mirum videatur: condonari profecto debet, si forte mens paulo pronior sit ad confugiendum ad quandam hypothesin, cui tamen quaedam Plutarchi loca iam supra laudata nonnullam sane verosimilitudinem adfundunt: duas scilicet ab Eudoxo propositas esse nostri problematis solutiones; alteram ad leges Geometriae accuratius exactam, in qua istas lineas curuas adhibere conatus sit, ab Eutocio autem ignoratam; alteram vero vt dicunt mechanicam, legatorum Deliacorum caussa forsan proprie excogitatam (vid. Plutarch. in lib. de Genio Socr. l. l.), qualem et reuera agitasse Eudoxum ex Plutarcho in Marcello pag. 305. tomi I. et in Sympos. pag. 718. tomi II. edit. Francof. 1620. apparet, quae denique posterior, cum

in

in ipſam incideret Eutocius et linearum curuarum deſideraret vſum, non potuit non incurrere in eius reprehenſionem. Certe, quo demum cunque modo res ſe habeat, indigna animi vehementia et acerbitate graſſari hunc Commentatorem Aſcalonitam in noſtrum Eudoxum, verba, quae ibi mox adiungit, (τὶ λέγω περὶ Εὐδόξου, ἀλλὰ περὶ τῶν καὶ μετρίως περὶ γεωμετρίαν ἀνεστραμμένων;) ſatis ſuperque produnt, ideoque contra ipſius de ſolutione Eudoxiana ſententiae veritatem ſuſpicionem mouent non prorſus vanam.

Cap. X.

MENAECHMVS.

Successit summis illis viris Menaechmvs, qui ex Eudoxi disciplina in institutionem et familiaritatem ipsius Platonis transgressus nostro problemati inprimis ope linearum curuarum perficiendo eadem, qua illi, incubuit industria et adsiduitate, sed feliciori successu. His enim, post varia forsan in secandis solidis formae diversae conamina, conum ad efficiendas ipsius sectione certas lineas curuas maxime idoneum aptumque ratus, si ille quidem plano per verticem vsque ad basin secundum axem transeunte secetur, effici triangulum, si vero planum basi coni parallelum traducatur, oriri circulum, cum iamdiu animaduertisset, mox planum secans versus basin inclinare tentando ad excogitandas accurateque constituendas celeberrimas illas tres lineas curuas (τριάδας, ap. Eratost.), *ellipsin*, *parabolam* et *hyperbolam*, quas proprie *coni sectiones* appellari placuit Mathematicorum coetui, primus fuit delatus, ipsasque mirum in modum

excul-

excultas ad noſtrum problema omni, qua gaudet Geometria, ſeueritate et perfectione ſoluendum inſigni mentis ſagacitate et dexteritate iam adhibuit.

Harum autem coni ſectionum inuentarum laudem Menaechmo eſſe propriam, cum iam ſupra (Cap. VI.) ex Gemini auctoritate probare conati ſimus: reſtat, vt hic, quae fuerit peculiaris harum Menaechmaearum coni ſectionum ratio et indoles (quippe quam in ipſarum quaſi incunabulis ab aetatis Apollonianae perfectione et quaſi virilitate paulo remotiorem et magis alienam fuiſſe, facile colligatur;) inprimis autem, quaenam de ipſis theoremata Menaechmo iam cognita fuerint et demonſtrata, breui digreſſione facta oſtendamus: quod et quae adhuc vsque huic rei defuit ſcriptorum hiſtoriae mathematicae diligentior tractatio et examen magnopere ſuadet, et ipſius huius ſcriptionis conſilium, inprimisque quae inde oriri debet de iſtis ſolutionibus Menaechmaeis infra exponendis accuratior cognitio rectiusque iudicium maiorem in modum requirere videtur et flagitare. Accidit praeterea hac in re viro celeberrimo *Montucla*, cuius auctoritatem in rebus hiſtoriae mathematicae inprimis conſulere et amplecti amant, vt diſcriminis in-

ter tempora Platonica et Alexandrina ſtatuendi parum memor, in exponenda ſectionum conicarum a Platonicis inuentarum natura et conſtitutione Apollonianam perfectionem et vniuerſalitatem primis nec ita abſolutis iſtius antiquioris aetatis conaminibus vindicare plane non dubitaret (vid. Hiſtoire des Mathematiques, tom. I. pag. 178 ſqq.); quod ipſi aegre condonari poſſe videtur. Fugit ſane ipſum, qui plurimum lucis huic rei adfundit locus maxime memorabilis Gemini, ab Eutocio in limine commentariorum in Apollonii conica integre exſcriptus et vberius illuſtratus (vid. Apollonii conicor. edit. Halleji, Oxon. 1710, pag 9.) quem, praeter ea, quae Pappus monet in praefatione libri VII. collect. math. (pag. 249 ſqq. edit. Bonon. 1660) in explicanda harum Menaechmaearum coni ſectionum conſtitutione maxime ſumus ſequuti. Ceterum ab illis ſcriptoribus antiquos appellari Geometras maxime eos, qui Platonis aetate nec multo poſt vixerint, ſatis conſtat; quare eo magis, quae ibi de antiqua ſectionum conicarum conſtitutione monentur, ad Menaechmum transferre non dubitauimus.

Definiebant autem iſta aetate conum ita, vt ipſum deſcribi dicerent ex circumuolutione trianguli

guli

guli rectanguli, manente vno eorum, quae circa rectum angulum sunt, latere immoto. Quod manens trianguli latus, si fuerit aequale alteri lateri, quod ad angulum rectum circumvoluitur, conum *rectangulum;* si vero fuerit minus altero isto latere, *obtusiangulum;* si denique maius, *acutiangulum* oriri dicebant conum. Hae igitur fuere tres coni eiusdemque recti species, in quibus tractandis substitit ipsorum studium; certe de conis scalenis eadem sollertia iam tum inquisitum esse, non constat. Cui rei et conspirat quam iniit Euclides in elementis suis ratio, qua adhuc in considerandis conis rectis tantum versatus est, scalenos vero non attigit. Vid. elementor. lib. XI, def. 18. Sic igitur Menaechmus omnes conos habens rectos, posteaquam sectione plani transeuntis per axem coni triangulum effici constituisset, alterum planum ad angulos rectos vni laterum huius trianguli conum secans posuit, atque circa differentes conos propriam in vnoquoque considerauit sectionem. Quam vero ad hunc modum in cono rectangulo constituit, vocata est *coni rectanguli sectio* (*Parabola*); in obtusiangulo, *coni obtusianguli sectio* (*Hyperbola*); in acutiangulo autem, *coni acutianguli sectio* (*Ellipsis*). Atque in hoc igitur inprimis cerni perspicitur, quae

fuerit

fuerit harum coni sectionum a Menaechmo constitutarum ab serioribus et perfectioribus Apollonianis quoad ipsarum quidem constructionem diuersitas, quod ille solis conis rectis vsus, in omnibus similiter ducens plana ad vnum coni latus recta, in singulis conis vnam tantum demonstraret coni sectionem, videlicet in cono rectangulo tantum Parabolam, in obtusiangulo tantum Hyperbolam, in acutiangulo tantum Ellipsin: Apollonius vero postea vniuerse omni cono tam recto, quam scaleno, omnes istas sectiones inesse doceret iuxta plani ad conum diuersam inclinationem. Hanc Gemini sententiam in commentario ad Apollonium pag. 9 expositam, cum qua conspirat Pappus pag. 250, conatus est ibi Eutocius subiectis figuris paulo planiorem reddere; cuius vero illustrationem hic praetermittere satius erit. Maxime enim id agit auctor Ascalonita, vt, vnde desumta sint illa sectionum conicarum nomina, Parabola, Hyperbola et Ellipsis, falsa Gemini interpretatione seductus dilucidius et vberius explicet.

Quod vero ad harum coni sectionum attinet proprietates, quot quantaeque ipsarum iam a Menaechmo fuerint detectae et demonstratae, si quaeratur: hoc quidem deficientibus hac de re

testi-

testimoniis antiquitatis luculentis non satis accurate et prolixe declarari potest: tamen, quantum ex Menaechmi rationibus mox tradendis coniicere licet, ipsum admodum alte et profunde indagasse de iis, quae in istis lineis curuis maxime accidunt iisque sunt propria; atque sic iam multa constituta esse et ostensa de ipsis theoremata, quamuis non ea vbertate, vniuersalitate et perfectione, quam post Aristaei, Euclidis, nec non Archimedis praeclara de hac re merita in sua conicorum expositione tam insigni laude et gloria monstrauit Apollonius, omnino adfirmare velimus. Ceterum, quae, cum necessario praemitti debeant et quasi fundamentum suppeditent hisce nostri problematis solutionibus a Menaechmo propositis, iam ab ipso excogitata et demonstrata fuisse satis superque intelliguntur, redeunt fere ad haec duo theoremata, quorum alterum de parabola, alterum de hyperbola ostenditur.

Sit in cono rectangulo ΑΒΓ sectio ΚΕΛ, Fig. 4. quae vocatur *Parabola*, cuius axis (diameter) sit ΕΖ. Erigatur transuersim inde a vertice sectionis Ε linea recta ΕΘ ad angulum rectum ipsi ΕΖ; fiatque $ΒΓ^2 : ΒΑ^2 = ΕΘ : ΕΑ$. Vocatur haec ΕΘ a Menaechmo πλευρὰ τοῦ εἴδους ὀρθία, *latus figurae rectum* s. potius *erectum* (q. e.

para-

parameter apud recentiores); atque inde grauissimum hoc *theorema*, quo diuersa et peculiaris parabolae constituitur natura, propositum fuit: *Si a quolibet puncto huius sectionis conicae* KEΛ *dimittatur recta, qualis* MN, *ad angulos rectos ipsi axi* EZ: *erit Quadratum ex hac* MN *aequale Rectangulo, quod fit ex latere recto* EΘ *et ea recta, quae ex axe* EZ *versus punctum* E *lineâ rectâ* MN *dimissâ abscinditur, qualis est* EN: (Ἥτις ἐστὶ κατηγομένη ἐν παραβολῇ ἐπὶ τὴν ἄξονα EZ ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ MN, δύναται τὸ παρὰ τὴν ὄρθιαν τοῦ εἴδους πλευρὰν EΘ παρακείμενον χωρίον, πλάτη ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς E; vt ex priore Menaechmi solutione graece refingi potest.) Quod recentiores ita enunciant: *In Parabola est Quadratum Semiordinatae aequale Rectangulo ex ipsius Abscissa et Parametro.*

Quod autem ad *Hyperbolam* attinet, de sectionibus oppositis iam rectiora vidit Menaechmus, asymptotorumque constitutionem et naturam satis inuestigauit, ita vt et inter datas duas rectas angulum continentes per punctum intra hunc angulum datum describere doceret hyperbolam, cuius asymptoti essent datae duae rectae; et inprimis

mis nobilissimum hocce theorema, quo omnia intra hyperbolam et asymptotos quae constituuntur parallelogramma ductis ex quolibet hyperbolae puncto rectis vtrique asymptotorum parallelis, quaeque angulum intra asymptotos communem habent, aequalia esse declarantur, (quod demonstratur apud Apollonium, prop. 12 lib. II,) satis superque euictum reddidit.

Quod reliquum est, quibus nobilissimorum horum theorematum demonstrationibus verosimiliter vsus sit Menaechmus, quae ab Apolloniana ratione sane paululum abhorruisse videntur, accuratiori disquisitione eruere; quemadmodum et, quantum quidem ex paucis quae apud scriptores antiquos offenduntur vestigiis et indiciis colligi et coniectari licuit, vberiorem et pleniorem totius de coni sectionibus doctrinae, qualis tum temporis forte fuerit constituta, exhibere descriptionem, hic praetergressi ali libello, mox et ipso in lucem edendo, qui ipsarum coni sectionum antiquam historiam tractabit, reseruandum duximus; quo et locus erit opportunior, de vocum Ellipseos, Parabolae et Hyperbolae, quibus singulas tres coni sectiones insigniri consueuit, antiquitate, prima origine, propriaque significatione

contro-

controuerſiam non penitus leuem, quoad quidem fieri poterit, dirimendi *).

Sed antequam quas ipſe Menaechmus excogitauit noſtri problematis ſoluendi rationes deſcribendas iam aggredimur, non poſſumus prorſus ſilentio praetermittere aliam non minus nobilem, nec minus decoris et ſplendoris adfundentem huic aetati Platonicae inuentionem, quae etiam noſtri problematis perficiendi ſtudio non parum videtur fuiſſe promota, de qua certe Menaechmus paulo altius iam indagaſſe ex ipſius ſolutionibus noſtri problematis ſatis ſuperque cognoſcitur. Intelligimus hic doctrinam illam *de locis geometricis*, quae, poſteaquam praeſtantiſſimam Analyſeos geometricae methodum diſcipulis ſuis impertiiſſet Plato, non potuit non mox excogitari atque excoli, et ipſa diſquiſitionibus illis de coni ſectionibus admodum coniuncta.

*) Illud tantum hic monere liceat, iſta coni ſectionum nomina ſerius eſſe introducta, certe Archimedem iis non vti, immo poſt Apollonium ea non omnino omnibus Geometris placuiſſe. Quare, ſi in Menaechmi noſtri problematis ſolutionibus infra exponendis, iſta nomina iam reperiantur, ea vel ab Eutocio, vel ab alio quodam, quem ſequutus ſit Eutocius, pro antiquioribus nominibus poſita eſſe, potius habendum eſt.

iuncta. Definiunt autem in Geometria *locum geometricum* ita, vt sit linea, per quam construatur problema, quod vocant *indeterminatum*, i. e. quod natura sua infinitas admittit solutiones. Conf. Pappus in praefatione lib. VII; et passim post lib. III. prop. 4 (pag. 7), et post lib. IV. prop. 30 (pag 95), vnde nostri problematis et illius de anguli trisectione soluendorum difficultates ad excolendam locorum geometricorum doctrinam non parum contulisse perspiciuntur. Vid. et Montucla V. C. (hist. des Math. tom. I. pag. 183 seqq.), qui ibi subtilissimae huius inuentionis indolem exemplis vsus iustis et satis facilibus admodum bene ostendit et explicat.

Constitutum fuit autem locorum geometricorum inprimis hocce discrimen, vt *loci plani* dicerentur linea recta et circulus, cum in plano ortum haberent; *solidi* vero, sectiones conicae, parobola, ellipsis, et hyperbola, quippe solidi sectionibus oriri conciperentur; *lineares* denique, quaecunque lineae essent neque rectae, neque circuli, neque aliqua illarum coni sectionum. Quo igitur relatae sunt helices, quadrantes, conchoïdes, cissoïdes, omnesque varium et difficilem ortum habentes, ex inordinatis superficiebus et motibus implicatis factae. Haec iam locorum geo-

metricorum diuiſio translata eſt et ad quae ipſis perficiuntur *problemata*, quorum alia *plana*, alia *ſolida*, alia autem *linearia*, quatenus quidem in ipſorum ſolutionibus vel loci plani, vel ſolidi, vel lineares requirerentur, ſunt appellata: ad quam problematum diuiſionem reſpiciendo intelligenda eſt, quae apud Geometras Platonicae vel paulo ſerioris aetatis (hos enim intelligit Pappus, cum antiquos laudat, pag. 7.) de noſtro problemate enunciata eſt quaeſtio, num ad plana, an ad ſolida, an denique ad linearia problemata ſit referendum? qua igitur nihil aliud ſignificari cognoſcitur, quam, num ad illud ſoluendum recta cum circulo ſufficiat, an aliis lineis curuis adhuc corpus ſit?

Quod autem ad Menaechmum attinet, quem nonnulli et huius de *locis geometricis* doctrinae inuentorem fuiſſe ſunt augurati, ipſum huius cognitionem tenuiſſe ſatis profundam et accuratam, in comperto eſt, et vtraque ipſius ſolutio noſtri problematis de inſigni iſtius doctrinae, quemadmodum et praeſtantiſſimae illius *methodi analyticae Platonis* vſu, monumentum exhibet antiquiſſimum et longe pulcherrimum.

* * *

Solutiones Menaechmi
apud Eutocium fere ita se habent:

Inter datas duas rectas Δ, E, supponantur iam esse inuentae mediae continue proportionales B, Γ. Detur positione recta AH terminata ad punctum A, sumaturque inde ab eo puncto AZ aequalis ipsi Γ, et ducatur ad angulos rectos ZΘ ipsi B aequalis. Quoniam autem est Δ: B = B: Γ; erit Rect. Δ, Γ = Quadr. B, [p. prop. 17. lib. VI. Euclid.] ideoque Rect. Δ, AZ = Quadr. B [quoniam Γ = AZ, et B = ZΘ]. Erit igitur punctum Θ in parabola per punctum A descripta. [Vid. theorema de parabola f. 1.] Ducantur parallelae ΘK [quidem ipsi AZ], AK [vero ipsi ZΘ]. Quoniam autem Rect. B, Γ, cum sit aequale dato Rectangulo Δ, E, et ipsum datum est: datum est quoque Rectangulum KΘZ. Itaque punctum Θ est in hyperbola, quae inter asymptotos KA, AZ descripta est. [Vid. theorema de hyperbola f. 1.]. Fig. 5.

Componetur iam problema hoc pacto. Sint quidem datae duae rectae Δ, E; positione autem data sit AH terminata ad punctum A. Describatur per punctum A parabola, cuius

 quidem

quidem axis ſit AH, rectum vero figurae latus Δ. Quaecumque autem recta ad angulos rectos ad AH ducitur, ipſius quadratum aequale ſit rectangulo ex ipſa Δ, et ea recta, quae [ex AH] verſus punctum A per illam rectam abſcinditur (Αἱ δὲ καταγόμεναι — σημείῳ.) Deſcribatur [parabola], et ea ſit AΘ; et recta [ducatur, eaque] ſit AK. Deſcribatur porro inter aſymptotos KA, AZ hyperbola, a qua ſi rectae ducantur ipſis KA, AZ parallelae rectangulum conficient ei aequale, quod ſub Δ, E continetur: atque haec quidem hyperbola parabolam ſecuerit. Secet in puncto Θ; et ducantur normales ΘK, ΘZ.

Quoniam igitur Quadr. ZΘ = Rect. Δ, Γ, [et Γ = AZ]; erit Δ : ZΘ = ZΘ : AZ. Et quoniam Rect. Δ, E = Rect. ΘZ, ZA; erit Δ : ZΘ = ZA : E. At erat Δ : ZΘ = ZΘ : AZ. Igitur etiam Δ : ZΘ = ZΘ : ZA = ZA : E. Ponatur ZΘ = B, et ZA = Γ. Vnde erit Δ : B = B : Γ = Γ : E.

Q. E. I.

Aliter.

Fig. 6. Sint datae duae rectae ad angulos rectos AB, BΓ, inter quas mediae ſiant ΔB, BE, ita

ita vt ſit ΓB : BΔ = BΔ : BE = BE : BA; et ducantur normales ΔZ, EZ. Quoniam igitur ΓB : BΔ = BΔ : BE; erit Rectang. ΓBE = Quadr. BΔ = Quadr. EZ. Contingit igitur punctum Z parabolam deſcriptam circa axem BE. Rurſus quoniam AB : BE = BE : BΔ; erit Rect. ABΔ = Quadr. BE = Quadr. ΔZ. Ideoque punctum Z contingit parabolam deſcriptam circa axem BΔ. Contigerat autem et alteram deſcriptam circa axem BE. Datum eſt igitur punctum Z; et cum ex Z normales ſint ZΔ, ZE, data ſunt quoque puncta Δ, E.

Componetur autem problema hoc pacto. Sint datae duae rectae AB, BΓ ad angulos rectos. Producantur a puncto B indefinite BΔ, BE; et deſcribatur circa axem BE parabola, ita vt quaecunque recta [EZ] ad angulos rectos ad BE ducatur, ipſius quadratum ſit aequale rectangulo ex BΓ et ea recta, quae ex BE verſus punctum B per rectam illam [EZ] abſcinditur. Rurſus deſcribatur circa axem ΔB parabola, ita vt quaecunque recta [ZΔ] normalis ad ΔB ducatur, ipſius quadratum aequale ſit rectangulo ex AB et ea recta, quae ex BΔ verſus pun-

ctum B per rectam illam [ZΔ] abſcinditur. Secant vtique hae parabolae ſe inuicem. Secent ſe in puncto Z; et ducantur a puncto Z normales ZΔ, ZE.

Quoniam igitur ducta eſt in parabola ZE, h. e. ΔB, erit Rectang. ΓBE = [Quadr. ZE =] Quadr. BΔ. Vnde ΓB : BΔ = ΔB : BE. Rurſus quoniam ducta eſt in parabola ZΔ, h. e. EB; erit Rect. ΔBA = [Quadr. ZΔ =] Quadr. BE. Vnde ΔB : BE = EB : BA. Erat autem ΓB : BΔ = ΔB : BE. Vnde etiam ΓB : BΔ = ΔB : BE = EB : BA.

Q. E. I.

* * *

Hae igitur ſunt illae duae Menaechmi ſolutiones, in quibus ſectionum conicarum a ſe inventarum praeclarum vſum ad perficienda difficiliora Geometriae diagrammata tam ſagaciter oſtendit; et quae ſane, quamuis pro duabus, quibus vſus eſt coni ſectionibus (in altera quidem ſolutione parabola et hyperbola, in altera vero duabus parabolis) vnam illarum cum circulo coniunctam adhibere, ſimplicior fuiſſet ratio, ſummae legum geometricarum ſeueritati et perfectioni tandem ſatisfacere merito habentur.

Quod

Quod vero ad praxin vſusque vitae vulgares attinet, cum omnis harum ſolutionum commoditas ab idonea ſectionum conicarum *in plano deſcriptione* prorſus pendeat, et hanc laudem ſibi Menaechmus non alienam duxit, cum talem ſectionum conicarum delineationem methodo aliqua mechanica conficiendam agitaret; quod ex Eratoſthene, qui ipſam in epiſtola illa ad Ptolemaeum *) tanquam nimis operoſam reprehendit, luculenter patet. Ceterum Eutocius, cui illa mechanica Menaechmi ratio non nota fuiſſe videtur, ad parabolae deſcriptionem mentionem facit circini (διαβήτου), ab Iſidoro Mileſio, praeceptore ſuo, inuenti; de cuius autem ſtructura, et vnde ſua ipſi conſtiterit commoditas, nihil nobis iam pro comperto eſt.

*) Vid. Archimedis edit. Oxon. pag. 144. Συμβέβηκε δὲ πᾶσιν αὐτοῖς ἀποδεικτικῶς γεγραφέναι, χειρουργῆσαι δὲ, καὶ εἰς χρεῖαν πεσεῖν μὴ δύνασθαι· πλὴν ἐπὶ βραχύ τι τοῦ Μεναίχμου, καὶ ταῦτα δυσχερῶς. Praeterea etiam in excogitanda aliqua ſolutione prorſus mechanica, priusquam quidem in vtramque illam per conicas ſectiones eſſet delatus, per aliquantum temporis occupatum fuiſſe Menaechmum, ex Plutarchi Sympoſ. pag. 718. tomi 2. edit. Francof. 1620 apparere videtur.

CAP. XI.

DE ARISTAEO. EXPLICATVR ARISTOTELIS ANALYTIC. POST. LIB. I. CAP. 7, ὅτι οἱ δύο κύβοι κύβος.

Expoſita igitur a nobis iam ſunt, quae ex ſcholae Platonicae temporibus non erant praetermittenda, quam inſigni quidem ſtudio et adſiduitate agitatum ſit ibi poſt Platonis ipſius admonitiones problema de duarum mediarum proportionalium inuentione, quae ſingulorum hac in re conamina fuerint prolata, quantus denique fuerit fructus, qui inde redundaret ad vniuerſam Geometriam perficiendam altiusque promouendam. Fuit hac ex parte ſine dubio ſumma laus Menaechmi, illius ſectionum conicarum conditoris ſagaciſſimi et in noſtro problemate ad omnem Geometriae ſeueritatem et perfectionem demonſtrando primi auctoris luculenti, cuius veſtigia contigit, vt iam exprimeret vir non minori mentis acumine et ſollertia, ingeniique fertilitate ad Mathematum diſciplinas excolendas et augendas inſtructus. Aristaevs quidem ex iniu-

iniustae obliuionis tenebris, quibus fere penitus obrutus iacuit, in gratam posteritatis memoriam prae aliis vindicandus, quae tam bene a Menaechmo inchoata erant circa conicorum et locorum solidorum doctrinam, adhuc magis perfecisse et in seueriorem disciplinae formam redacta tradidisse habendus est. Laudantur apud Pappum in praefatione libri VII. ipsius libri quinque *conicorum* (quos postea inprimis secutus fuisse perhibetur Euclides in sua conicorum tractatione), quibus cohaerentes totidem *locorum solidorum* libros conscripsit. Aristaei loca solida ad nostri problematis solutionem a nonnullis adhibita fuisse, monet Pappus pag. 7; num autem Aristaeus ipse hac in re aliquid tentauerit, non constat. Certe igitur non defuisse videmus et post Menaechmum, qui de singulari vsu illarum recens inuentarum coni sectionum ad cubi duplicationem infinitis modis efficiendam inquirerent; pluresque igitur editas esse soluendi huius problematis rationes, quarum quidem memoria mox euanuisse videtur, fere dubium non est.

Ceterum cum ex tam frequenti tractatione maiorem semper obtineret problema nostrum famam et celebritatem, num quoque qui haec tempora condedorauit, ille philosophorum totius

antiquitatis princeps, acutiſſimusque in omni diſciplinarum genere iudex et arbiter, Aristoteles, etſi non peculiari ſtudio de quadam cubi duplicandi ratione ipſe quaeſtiones inſtituerit, certe tamen pro more ſuo, quo in ſcriptis ſuis exempla a rebus mathematicis mutuare et examinare amat, etiam de noſtri problematis natura et indole, et in quam Matheſeos partem proprie cadat ipſius inueſtigatio, ſententiam ſuam vllibi palam fecerit, inquirere non alienum erit. Habemus qui huc referri ſolet ipſius locum inſignem in *Analyticor. poſt.* lib. I. cap. 7. vbi poſteaquam expoſuit, non licere ex alio genere ſcientiae in aliud deſcendendo demonſtrare, ita pergit: "Quare Geometriae non conuenit demonſtrare, quod contrariorum vna ſit ſcientia, nec quod duo cubi „*faciant* cubum, omninoque alicui ſcientiae non „*conuenit demonſtrare, quod eſt* alterius:" *Διὰ τοῦτο τῇ γεωμετρίᾳ οὐκ ἔστι δεῖξαι, ὅτι τῶν ἐναντίων μία ἐπιστήμη, ἀλλ' οὐδ', ὅτι οἱ δύο κύβοι κύβος· οὐδ' ἄλλῃ ἐπιστήμῃ τὸ ἑτέρας.* Quae apud Philoponum (fol. 24, edit. Ald. 1534) ita explicata leguntur: *τὸ μὲν γὰρ δεικνύναι, ὅτι τῶν ἐναντίων μία ἐπιστήμη, οὐκ ἔστιν ἴδιον γεωμετρίας — μᾶλλον δὲ, διαλεκτικῆς — ὁμοίως ὅτι οὐδὲ οἱ δύο κύβοι κύβος, γεωμετρίας ἐστὶ δηλονότι ἀπο-*

ἀποδεῖξαι, στερεομετρίας δὲ μᾶλλον· γεωμετρία μὲν γὰρ περὶ τὰ ἐπίπεδα ἔχει τὴν σκέψιν· στερεομετρία δὲ, περὶ τὰ στερεά. κύβος δὲ ὑποκείμενον τῇ στερεομετρίᾳ. Verba autem ὅτι οἱ δυό κύβοι κύβος ita intelligenda esse dicit Philoponus, vt exprimant quaestionem, quomodo fieri possit, vt cubus duplicetur et tamen cubicam seruet formam; viderique allusum esse ad famigeratam (πολυθρύλλητον) illam de ara Apollinis Delii duplicanda narrationem, quam ibi paucis exponere, inde sumit occasionem. Obiiciuntur quidem contra hanc Philoponi interpretationem, totam rem de illo μεταβάσεως εἰς ἄλλο γένος crimine ab Aristotele eo restringi, vt quae sint ad se inuicem ita adfecta, vt illorum alterius genus sit alterius generi subiectum, quemadmodum Optica ad Geometriam et Harmonica ad Arithmeticam adfecta sit, in his demonstrationes inuicem mutuari concedatur; Stereometriam autem ad Geometriam hoc modo se habere, vt ipsius pars sit: quare de cubi duplicatione quaestionem ad Geometriam pertinere, quomodo negari possit, non bene perspicuum fieri. Quae vero dubitatio penitus tolli potest, si in animum nobis reuocamus, apud Aristotelem Stereometriam Geometriae non subiectam, sed potius ipsi in diuisione oppositam fuisse; quod confirmatur ex

Pro-

Proclo, qui ad definitionem Euclidis de Plano (pag. 32 ed. Baſ.) monet, antiquis philoſophis non placuiſſe Planum Superficiei ponere ſpeciem, verum vt idem vtrumque ab ipſis adſumtum eſſe ad magnitudinem duplici interuallo diſtantem repreſentandam. "Ita enim, pergit, quoque „diuinus Plato Geometriam dixit eſſe Planorum „contemplatricem, Stereometriam ipſi in diuiſione „opponens, perinde ac ſi eſſet idem Planum et „Superficies. Similiter etiam incomparabilis Ari„ſtoteles." (Οὕτω γὰρ καὶ ὁ θεῖος Πλάτων τὴν γεωμετρίαν τῶν ἐπιπέδων ἔφατο θεωρητικὴν εἶναι, πρὸς τὴν στερεομετρίαν αὐτὴν ἀντιδιαιρῶν – – καὶ ὁ δαιμόνιος Ἀριστοτέλης ὡσαύτως.) Tenendum eſt praeterea, quod iſto tempore Stereometriam ita accipiebant, vt ad ipſam et omnia, quae de linearum curuarum (quippe ſolidorum ſectionibus conſtitutarum) natura et affectionibus iam inuenta tradebantur, referrent; quemadmodum ex multis Platonis locis abunde perſpicitur. Quare, ſi quidem ſecundum Philoponum cubi duplicationem in loco Analyticor. laudato exprimere concipiendus eſt Ariſtoteles, nulla ſane alia ipſius ſententia conſtitui poteſt, quam vt doceat, illud problema ad Stereometriam referendum eſſe, atque ad ipſius ſolutionem, quae ſolidorum ſectionibus oriantur, lineas curuas (loca ſolida) neceſſario

eſſe

esse adhibendas; qui vero sola ope Geometriae, Planorum contemplatricis, (per loca plana) illud perficere agitarent, eos crimine μεταβάσεως ἐς ἄλλο γένος τῆς ἐπιστήμης nullo modo liberandos esse.

Sed non negligenda est, quae contra a Blancano (vid. Iosephi Blancani Loca Mathematica Aristotelis, ex vniuersis ipsius operibus collecta atque explicata, Bonon. 1615, pag. 52) proponitur huius loci interpretatio, qua per cubos intelligit numeros sic dictos, atque Aristotelis sententiam ita constituit: non pertinere ad Geometriam ostendere de numerorum affectionibus propositiones, veluti hanc: si cubus numerus cubum numerum multiplicauerit, productus numerus erit pariter cubus. Quod demonstratum est in Euclidis elementor lib. IX, prop. 4. Provocat inprimis ad cap. 10 eiusdem libri Analyticor. post. vbi legitur: οἷον, ἡ μὲν Ἀριθμετικὴ, τί περιττὸν, ἢ ἄρτιον, ἢ τετράγωνον, ἢ κύβος, vnde et in illo loco cubos arithmeticos intelligendos esse admodum verosimile fieri ingenue fatemur. Quae igitur Blancani interpretatio, si forte praeferenda videatur illi, quae modo secundum Philoponum exposita est (quam tamen non

ita

ita incommodam nec ineptam eſſe, vt Blancanus ſuſpicatur, luculenter oſtenſum eſt) nihil amplius ex hoc loco peti poſſe ad Ariſtotelis ſententiam de noſtri problematis ſolutione declarandam, non eſt quod moneamus.

Cap. XII.

AETAS PTOLEMAEORVM.

QVAENAN EVCLIDIS ET ARCHIMEDIS DE NOSTRO PROBLEMATE SINT MERITA.

Venimus iam ad ea tempora, quae ob ſingulares et maxime admirandos progreſſus, quibus ad ſummum fere perfectionis faſtigium accreuere litterae mathematicae, ipſarum *aurea aetas* non ſine iure quodam appellari poſſunt. Loqui nos de *aetate* Ptolemaeorvm, ſeu *Alexandrina*, quisque antiquarum litterarum non plane rudis facile perſpiciet; in qua autem et noſtrum problema tantum abfuit vt neglectum iaceret, vt potius fere maiori adhuc ſtudio et concertatione quam unquam coleretur. De duumuiris quidem illis Mathematicorum et iſtius temporis et totius antiquitatis principibus, Evclide et Archimede, num etiam inueniendis duabus mediis proportionalibus aliquam ſingularem nauauerint operam, non conſtat. Certe *Euclidem* in conſcribendis Mathematum elementis videre licet non vltra proceſſiſſe, niſi quod in tractandis

planis

planis ex tribus datis continue proportionalibus primam habere se ad tertiam quemadmodum Quadratum ex prima ad Quadratum ex secunda, simulque vnam mediam continue proportionalem inter duas datas inueniendam doceret (vidd. elementor. lib. VI. propp. 13, 19 sqq.); in tradendis solidis vero ita versaretur, vt, quamuis quidem illud (lib. XI. prop. 33 coroll.), si quatuor rectae in continua sint proportione, primam se habere ad quartam, quemadmodum Parallelepipedum ex prima ad Parallelepipedum simile et similiter positum ex secunda, non inostensum relinqueret, et sic viam monstraret, qua ad cubum duplicandum vnice potest perueniri, tamen nec de cubo ipso duplicando nec de inueniendis duabus mediis continue proportionalibus quaedam accuratius attingeret, sed potius vniuersam Stereometriam ita absolueret, vt hocce problema, tanquam cui reliqua superstruenda esset, neutiquam desideraretur. Conf. Philoponus in Aristot. analyt. post. fol. 24 ed. Ald. 1534. In libris vero, quibus sublimiora Matheseos tractauit, (scripsisse enim ipsum nominatim de conicis sectionibus et de locis ad superficiem, ex Apollonio et Pappo satis notum est. Vidd. Apollonius in prooemio ad conica, pag. 8, Eutociique comment. pag. 12, edit. Halleyi Oxon. 1710; et Pappus

Pappus in praefat. libri VII collect. math. pag. 241 et 249 sqq.) vel alioquin singulari tractatione, num quaedam noua ad nostrum problema perficiendum sit conatus, videtur non satis explorari posse. Possint quidem forte huc referri, quae Apollonius in prooemio illo conicorum suorum contra Euclidem monet, multa et omnigena theoremata, vtilia ad compositiones locorum solidorum et ad determinationes, eaque pleraque perpulchra et noua in libro tertio a se demonstrata esse laudaturus. "Hisce autem perpensis „(pergit) animaduerti, non compositum esse ab „Euclide locum ad tres vel quatuor lineas, sed „particulam tantum eius, atque hanc non satis „feliciter: impossibile enim erat, absque praedictis „propositionibus perfectam eius compositionem ex„hibere" (ἃ καὶ κατανοήσαντες εὕρομεν μὴ συντιθέμενον ὑπ' Εὐκλείδου τὸν ἐπὶ γ' καὶ δ' γραμμὰς τόπον, ἀλλὰ μόριόν τι αὐτοῦ, καὶ τοῦτο οὐκ εὐτυχῶς· οὐ γὰρ δυνατὸν ἄνευ τῶν προειρημένων τελειωθῆναι τὴν σύνθεσιν.) Descriptus legitur hic Apollonii locus quoque apud *Pappum* in praefat. lib. VII. collect. math. (pag. 250 ed. Bonon. 1660; Vidd. et *Apollonii Pergaei* de sectione rationis libri duo ex Arab. MS^to^ latine versi etc. Praemittitur *Pappi Alexandrini* praefatio ad VII. coll. Math. nunc primum graece edita; opera et stu-

dio Edm. Halley, Oxonii 1706, pag. XIV.) qui ibi in ipſo explanando verſatur, non vero ita, vt arbitretur, Apollonium hiſce verbis inuehi in Euclidem, quod duas medias proportionales non invenerit; quam verborum Apollonii interpretationem Eutocius in adnotat. ad Apollonii praefat. (pag. 12. edit. Halleyi) Pappo, ſed iniuſte tribuit. Apollonium potius ob alium librum de locis conſcriptum in Euclidem graſſari, quod hic, cum in ſuis conicorum libris illas, quas ipſe Apollonius in conicorum libro illo tertio demonſtrauerit propoſitiones, non oſtenſas exhibuerit, loci ad tres vel quatuor lineas compoſitionem in illo libro de locis non potuerit non imperfectam et inchoatam relinquere, ſatis perſpicuum eſt. De loco autem ad tres vel quatuor lineas componendo quaeſtio, qualis ſit, ibidem apud Pappum prolixius illuſtrata legitur; ipſiusque perfectiori doctrinae quantopere coniuncta ſit inueniendarum duarum mediarum proportionalium ratio longe abſolutior, facile intelligitur. (Conf. Carteſius in Geometriae libro I.) Attamen quamuis Euclides illam de locorum ad tres vel quatuor lineas compoſitione doctrinam attigiſſe ex hac Apollonii praefatione perſpiciatur, ipſum etiam ad duas medias proportionales ſingulari ratione conſtituendas deſcendiſſe, nullomodo adfirmari poteſt.

Quod

Quod vero ad ARCHIMEDEM attinet, qui omnes mathematicas litteras ingenii ſui luce illuſtrauit praeſtantiſſimisque inuentis admodum auxit, tractauit hic quidem plures ſolidorum fabricas, et praeterquam quod figurarum conoidum et ſphaeroidum vel integrarum vel ſectarum expoſuit naturam, ipſarumque cum cylindris conisque eandem baſin et altitudinem habentibus inſtituit comparationes, maxime ſphaerae et cylindri ratione tam perfecte eruta nominis immortalitatem et magnam poſterorum gratiam iure ſibi pollicitus fuit. Sed duplicandi cubi vel inueniendarum duarum mediarum proportionalium, tantum abfuit, vt ipſe aliquam peculiarem et reliquis perfectiorem tentaret rationem, vt potius, in demonſtrandis nonnullis grauiſſimis doctrinae ſolidorum propoſitionibus, huius problematis inuentionem tanquam iam aliunde ſatis notam praeterire non dubitaret; veluti in probl. 2. libri II, de ſphaera et cylindro. Certe Eutocius ad h. l. adfirmat, quam inueniendarum duarum mediarum proportionalium rationem amplexus ſit Archimedes, ſibi plane non compertum eſſe. Similiter in tractandis rebus mechanicis, ex quibus ſummam quoque nactus eſt laudem et famam, inprimisque in fabricandis famoſis illis belli machinis, quibus fortiſſimi et inſigni bellicarum machinarum appa-

ratu instructi oppugnantis exercitus impetus semper superauit, clarissimique ducis virtutem et consilia tamdiu irrita fecit (Conff. quae de memorabili illa Syracusarum obsidione narrant Polybius, lib. VIII, Liuius lib. XXIV, et Plutarchus in Marcello, cap. 14-20); num ad aliquam nostri problematis per instrumenta soluendi rationem excogitandam, qua inprimis vteretur in tormentorum magnitudine secundum proportionem constituenda, ipsorumque vi et effectu accurate augendo vel diminuendo, sit delatus, cum eiusmodi mechanica artificia ad vsum tantum comparata non magni faceret, ideoque scriptis seruanda non curaret, prorsus ignotum est.

Etsi vero nec Euclidi nec Archimedi ita arrisisse videtur de inueniendis duabus mediis proportionalibus problema, vt ipsius paulo accuratiori tractationi aliquantum temporis subseciui impendissent: exstitit tamen mox satis magna et nobilis Geometrarum frequentia, qui maxime Matheseos ad rerum humanarum vsus translatae studio, cum in ea nostri problematis solutione, quae, cum esset ad leges geometricas seuere exacta, simul ad vitae humanae vsum commoda et facilis inueniretur, perficienda frustra ab antiquioribus labo-

laboratum esse cognoscerent, huius difficultatis sublatae gloriam adfectantes in hac palaestra sese exercere non sunt adspernati. Cum enim quae circa artem machinalem ipsiusque in efficiendis Geometriae propositionibus ab Archyta quidem et Eudoxo primum proposita, a Platone autem vehementer improbata, diu a philosophis despecta inter artes militares delituissent (vid. Plutarch. in Marcello, pag. 305 sq. tomi I, edit. Francof. 1620); ab Archimede (maxime desideriis Hieronis regis satisfacturo) retractata et ad promouendas vt ceteras vitae humanae artes ita et bellicas, ipsarumque maxime eam partem, quae βελοποιητικὰ s. ὀργανοποιητικὰ tractat, tam felici et mirabili successu essent collata: sequuti sunt mox plures, praecipue regum Ptolemaeorum φιλοδόξων et φιλοτέχνων fauore et liberalitate suffulti, qui Archimedis vestigia exprimentes, hasce artes mechanicas adhuc nouis inuentis locupletatas, accuratiori tractatione et in iustam disciplinae formam redactas scriptis mandarunt; quorumque in libris, qui de telis fabricandis agunt, huius problematis soluendi rationes nonnullae expositae leguntur. Pertinent huc, praeter *Apollonium* et *Eratosthenem*, qui, etsi proprie de machinis bellicis ipsos scripsisse non constat, vitae

tamen communis in vſum inſtrumentis accommodatas noſtri problematis propoſuerunt ſolutiones; maxime *Hero*, *Cteſibii* diſcipulus, et *Philo Byzantius*, de quorum ſoluendi rationibus deinceps ſingulatim videbimus.

Cap. XIII.

CAP. XIII.

STVDIA HORVM TEMPORVM MECHANICA.

SVMMA CVBI DVPLICATIONIS IN MACHINARVM BELLICARVM DOCTRINA NECESSITAS.

Vt autem de Geometrarum et Mechanicorum huius aeui laboribus, quos cubo duplicando impenderunt, rectius paulo et accuratius iudicium haberi possit: et in animum reuocanda sunt, quae iam supra in Introductione de insigni problematis huius in rebus vitae communis vi et vsu omnino dicta sunt; et inprimis, quam singularem ipsius solutio in omni construendarum machinarum bellicarum doctrina, vtilitatem et necessitatem habuerit, paulo prolixius declarandum; quemadmodum etiam de temporum istorum indole et conditione non nihil adhuc monendum superest.

Quod autem huic aetati maxime proprium et peculiare habendum est, cum, bellis ciuilibus

ab Alexandri Macedonis morte exortis, in communi illa terrarum vastatione et vexatione, litterae diu adflictae, in Ptolemaeorum aula, vbi tutum et augustum nactae essent receptaculum, maiorem in modum reflorescerent, inprimisque Mathesis summo coleretur studio: nulla huius grauissimae disciplinae pars maiora tum habuisse incrementa, huiusque aeui hominibus magis arrisisse videtur, quam, quae fines, quibus Plato Mathemata circumscribi voluit, (vid. Plutarchi Sympos. lib. VIII, pag. 718. tomi 2 operum) transgressa, ad res naturales vitaeque communis in vsus conferri coepit atque adhiberi. Tractauit autem haec, quae vocata est *scientia machinalis* (*τέχνη* vel *θεωρία μηχανικὴ* s. *ὀργανικὴ*) non solum vniuersales illas de motu doctrinas, quae machinarum omnium constituunt principia et elementa; sed etiam omnem rem Aerariam, Aedificatoriam, Fabrilem, Pictoriam, omnesque et singulas, quae manuum opera indigent, vitae communis complexa est artes. Conf. Pappus in praefat. libri VIII, collect. math. Ad hanc igitur promouendam perficiendamque cum plurima ex sola experientia essent constituenda, ideoque rerum multarum vsus et experimenta non sine magnis sumtibus habenda requirerentur: liberalitate et munificentia ipsis adfuisse plane regia,

peren-

perennis erit apud posteros Ptolemaeorum laus. Sic euenit, vt Alexandrina Mechanicorum schola reliquarum, quae tum adhuc in insula Rhodo, neconon Pergami in Attalorum aula florerent, concertationibus facile euaserit princeps; quibus quidem concertationibus, cum ea Mechanices studia, quibus regnum et imperium essent adepti, prae ceteris adamasse et coluisse videantur reges, inprimis machinarum bellicarum doctrina, quae iam sub Alexandro Macedone et Demetrio Poliorcete tantis aucta erat incrementis, ad summam accreuit perfectionem. Quae autem ad hanc ipsius perfectionem adhuc vsque erant desiderata, spectarunt, maxime ad machinarum exaedificandarum dimensiones, quod quidem ipsarum vim et effectum in proiiciendo telo certa et constante ratione constituere non possent. Illud quidem mox cognitum fuit, si machina esset exaedificanda, quae lapidem aut sagittam maiorem vel minorem, quam altera machina data, vsque ad eandem proiiceret metam: necesse esse, vt singulae ipsius partes secundum proportionem maiores vel minores constituerentur. Nec diu sagaciores Mechanicorum latuit, quod, cum caussa telorum emittendorum proprie esset funis ille tortus (ὁ τόνος), qui per rotundum in machinae capitulo foramen transiens totam ipsius capacitatem ex-

 pleret,

pleret, (ita vt et huius foraminis et illius funis fere eadem concipi poſſet diametrus *)) omnia eſſent reuocanda ad hocce in machinae capitulo foramen, ex quo, ſi fuerit conſtitutum, omnes reliquae machinae partes eſſent dimetiendae **). Sed

*) Sic in recentiori arte tormentoria fere eadem conſtituitur globi calibra, quae eſt tormenti, quod globum eiaculatur.

**) Hocce grauiſſimum conſtruendarum machinarum praeceptum pulchre illuſtrat *Philo* (Veteres Mathematici edit. Theuenoti, pag. 50.) comparatione ipſius inſtituta cum dicto, quod Polycletus ſtatuarius de ſua arte proferre ſolebat. Quemadmodum enim hic adfirmaſſet de ſtatuis, quod in ipſis bene eſſet factum, paruo (i. e. parua aliqua re immutata) fieri omnibus numeris abſolutum: ſimiliter (ſed potius contrarium) euenire monet Philo etiam in machinis bellicis, vt, cum iam eſſent fere omnibus numeris abſolutae, paruo errore in aliqua machinae parte (veluti in foramine funis) commiſſo, magnum in conſummatione exiſteret peccatum. *ὥστε τὴν ὑπὸ πολυκλείτου τοῦ ἀνδριαντοποιοῦ ῥηθεῖσαν φωνὴν οἰκείαν εἶναι τῷ μέλλοντι λέγεσθαι· τὸ γὰρ εὖ παρὰ μικρὸν διὰ πολλῶν ἀριθμῶν ἔφη γίνεσθαι· τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον καὶ ἐπὶ ταύτης τῆς τέχνης συμβαίνει, διὰ πολλῶν ἀριθμῶν συντελουμένων τῶν ἔργων, μικρὰν ἐν τοῖς κατὰ μέρος παρέκβασιν ποιησαμένους μεγάλας* (ſubint.

Sed quam rationem habere deberet magnitudo foraminis ad pondus lapidis vel longitudinem sagittae emittendae, haec adhuc diu non potuit inueniri; quippe quae, vt res soli experientiae subiecta, posteaquam, quae antea admissa essent, inspicere, atque ex multis machinis augendo vel contrahendo foramine diuersos ipsarum effectus experiri licuisset, certo demum et constante modo esset eruenda. Celebrantur autem Mecha-

nici

int. παρεκβάσεως, vel legendum μέγα) συγκεφαλαιοῦνται ἐπὶ πέρας ἁμάρτημα. — Ceterum, vt huic de machinarum bellicarum dimensionibus doctrinae prolixius explicandae immoremur, quemadmodum etiam, vt ad vberius exponenda singularum machinarum (quarum infra mentio fiet) discrimina, quibus in Palintona, Euthytona cett. fuerint diuisa, digrediamur, a nobis hic nullo modo exigi potest. Conf. de tota hoc re prae aliis Silberschlagius V. Cel. in dissertatione de Vitruv. lib. X. cap. 15-18. in Annalibus Academiae Regiae Borussicae ad 1760, pag. 378 sqq. (Dissertation sur les trois principales Machines de guerre des Anciens etc.) quamuis capitibus illis Vitruuianis idonee explicandis, quemadmodum et omnino illi artis mechanicae veterum parti, quae de machinarum dimensionibus agit, prae ceteris inprimis neglectae et obscuratae, quatenus quidem fieri posset, illustrandae nequaquam satisfecisse habendus sit.

nici Alexandrini, qui primi, cum regum liberalitate maximum omnium rerum habuerint apparatum, hanc rem, cui tanquam principio et fundamento omnis machinarum bellicarum constructio prorsus inniteretur, ad certum elementum perduxerint; atque quidem apud ipsos ratio foraminis ita fuit constituta, vt in Balistis quidem ipsius diametrus tot fieret digitorum, quot elicerentur, si ex numero minarum lapidis mittendi centuplicato radix extraheretur cubica, addita insuper ipsius decima parte; in Catapultis autem et Scorpionibus, quantum habuerit longitudinis sagitta emittenda, ipsius nona pars diametro foraminis adsignaretur. Necesse igitur fuisse videmus, certe in Balistarum foramine constituendo, vt numerorum radices extraherentur: vnde vero difficultas sane non parua oriri debuit veteribus, qui, cum, quae in recentiori Arithmetice exhibentur varia computandi artificia, eorum prorsus rudes essent, vel leuissimas, vt hodie habentur, numerorum operationes non sine multo labore et per incertas ambages perficere aggressi sunt; quod mox pro comperto erit illi, qui celebratissimos Archimedis libros, Arenarium et Circuli Dimensionem obiter tantum perlustrauerit. Quod autem numeros radicales attinet, ad ipsos inueniendos nulla alia methodo

vete-

veteres vſi eſſe videntur, quam qua forte in meris tentaminibus et repetitis numerorum, quos ad radicales quam proxime accedere augurarentur, ad datum gradum euehendorum experimentis deſudarent; vnde, quam parum accurate conſtitui potuerint, facile intelligitur, maxime cum, cuius eruenda eſſet radix, numerus incommenſurabilis eſſet vel irrationalis. In numero, qui non ſit quadratus, latus quadraticum plane non accurate inueniri poſſe, adfirmat Eutocius in comment. ad prop. 3 libri ſupradicti Archimedis de Circuli Dimenſione; vbi etiam ab Herone in libro aliquo de Metricis (ἐν τοῖς Μετρικοῖς), quomodo oporteret latus inuenire, quod datum numerum quam proxime faceret, oſtenſum eſſe indicat *). Has igitur operoſas et incertas numerorum operationes dum euitare cuperent, factum eſt, vt de illa foraminum per calculum inuentione in geometricam conſtructionem transferenda cogita-

*) Conff. quae de Arithmetice veterum monet *Kaeſtnerus* V. S. in libro, qui omni Mathematicorum choro gratiſſimus et exoptatiſſimus nouiſſime prodiit (*Geſchichte der Künſte und Wiſſenſchaften ſeit Wiederherſtellung derſelben u. ſ. w. von einer Geſellſchaft gelehrter Männer; ſiebente Abtheilung. Geſchichte der Mathematik von Abrah. Gotth. Käſtner, Göttingen, 1796.*) pag. 44 ſq. et paſſim alibi.

cogitarent. Quod quidem ita perfecerunt, vt, posteaquam semel secundum methodum praedictam alicuius machinae foramen accurate fuisset inuentum, ex hoc cuiusuis alius machinae siue maioris siue minoris foramen geometrice, ope quidem nostri problematis soluti, constituendam proponerent. Contemplati enim sunt singularum machinarum foramina, tanquam cylindros similes, qui essent in ratione triplicata diametrorum basis suae (Euclid. elem. lib. XII, prop. 12); ita vt, quae inter diametrum foraminis machinae datae, et hanc diametrum toties auctam vel diminutam, quoties pondus teli ex machina exaedificanda emittendi superaret pondus teli, quod emitteret machina data, vel ab ipso superaretur, fuerit inuenta prior media continue proportionalis, hac constitueretur quaesita machinae exaedificandae diametrus.

Haec fere sunt, quae praemonenda habuimus. Clariora autem fient magisque perspicua ex iis, quae de Herone et Philone nobis iam sunt dicenda; vbi etiam, vt, quae exponendis suis mediarum proportionalium constructionibus de huius problematis vi et vsu praemunire inueniantur auctores isti mechanici, adhuc exhibeamus paucisque illustremus, necesse erit.

Cap. XIV.

CAP. XIV.

HERO ALEXANDRINVS.

Videtur autem HERO ALEXANDRINVS non multo iunior Archimede, temporibus quidem Ptolemaei IV Philopatoris vixiſſe, e numero praeſtantiſſimorum Geometrarum et Mechanicorum, quibus tum Alexandria maxime inclaruit, prae aliis inſignis. Inuenitur autem plerumque cognominatus *Cteſibii*, ſubaudito videlicet, diſcipulus; quia nempe diſcipulus fuit Cteſibii Alexandrini, ſummi machinarum pneumaticarum et organorum hydraulicorum inuentoris, apud Vitruvium (lib. 7. praefat; lib. 9. cap. 9; lib. 10, cap. 12), Plinium (lib. 7. cap. 37) et Athenaeum Deipnoſophiſtam (lib. 4 et lib. II) laudatiſſimi; a quo viro tanto cognomen ducere, non potuit non eſſe Heroni quam maxime glorioſum.

Huius praeceptoris excellentia propriique ingenii acumine et ſollertia adiutus, cum mox magnos in ſublimioribus illis doctrinis faceret progreſſus, maxime Archimedem, Geometrarum et

Mecha-

Mechanicorum omnium principem, in cuius grauiſſimis et praeclariſſimis inuentis mechanicis exponendis, illuſtrandis et adaugendis maxime verſarentur celebriorum Mathematicorum iſtius temporis plerique, ſequendum ſibi et imitandum propoſuit, ita vt illius veſtigia exprimendo inter eos, qui tum primi mechanicas inuentiones in ſeueriorem diſciplinae formam redactas tradere conati ſunt, primarium facile occupet locum. Praeter libros autem, quibus ad mathematicas diſciplinas ipſas harumque ſingulas partes perficiendas, inprimis quoque ad Geometriae principia accuratius concinnanda, nouasque ſingulis propoſitionibus demonſtrationes inueniendas (qua ex parte apud Proclum ſaepius commemoratur; vid. Procl. in 1 Euclid. pag. 55, 85 et 111.) multum ſtudii et diligentiae contulit: praeſtantiſſima ingenii ipſius monumenta habentur, quibus fere omnes et ſingulas artis machinalis diſciplinas illuſtrare aggreſſus eſt, quorum nonnulla adhuc ſeruata proſtant: τὰ πνευματικὰ (*Spiritalia*), τὰ αὐτοματοποιητικὰ (*de automatorum fabrica*), τὰ βελοποιικὰ ſiue potius βελοποιητικὰ (*de telorum fabrica*), atque denique τῆς χειροβαλλίστρας κατασκευὴ καὶ συμμετρία (*de manubaliſtae conſtructione et menſura*), omnia in collectione vet. Mathematicorum Theuenoti, Pariſ. 1693 edita;

plera-

pleraque vero temporis edacitate absumta apud scriptores antiquos passim tantum laudantur: veluti περὶ τῶν ὑδρίων ὡροσκοπείων (*de aquariis horologiis*; ap. Pappum in coll. math. lib. VIII, praef; ap. Proclum in Astronom. Hypotypos. Bas. 1540, pag. 42; et ap. ipsum Heronem in Spiritalium limine), περὶ ζυγίων (*de statеris*; ap. Pappum l. l.), περὶ καμαρικῶν (*de fornicatis parietibus*; ap. Eutocium in com. in Arch. de sph. et cyl. lib. II prop. 2, pag. 143), τὸ βαρουλκὸν (scil. ὄργανον, *de trahendis oneribus*; ap. Pappum in coll. math. lib. VIII, prop. 10, et ap. Tzetzen, Chil. II, hist. 35), περὶ τροχιωδιῶν (*de rotulis*; ap. Pappum l. modo l.); quibus denique ipsius μετρικὰ, ab Eutocio in com. in Arch. de circuli dimens. citata, cum etiam res ad Mechanicen pertinentes tractasse videantur, adhuc adnumerari possunt. Absolutissimum autem et nobilissimum celebratur Heronis opus, (quod temporis iniuria et librariorum negligentia pessime mulctatum et deprauatum fuisse iam luget Pappus post prop. 24, lib. VIII, coll. math. pag. 482), quo vniuersalem Mechanices doctrinam Archimedea prorsus subtilitate et sollertia complexus esse perhibetur, inprimisque de quinque mechanicis facultatibus, quae machinarum fere omnium constituunt principia et elementa, videlicet de Axe, quem dicunt in Peritrochio, de Vecte,

de Polyſpaſto, de Cuneo, et de Cochlea, quae appellatur infinita, expoſitionem exhibuiſſe accuratiorem. Inſcriptus fuit hic liber *μηχανικαὶ εἰσαγωγαὶ* (*mechanicae inſtitutiones*) et in plura volumina digeſtus, quod certe docet tertii apud Pappum (pag. 488) commemoratio; qui quidem ex ipſo fere omnia decerpſiſſe habendus eſt, quae ad hanc rem pertinentia octauo collectionum mathematicarum libro adiecit.

In hoc igitur opere etiam expoſita fuit duarum mediarum proportionalium organice inueniendarum, quae ab Herone excogitata eſt, ratio; vnde ipſam maxime deſcripſiſſe videtur Eutocius ad Arch. de ſph. et cyl. l. I. (pag. 136), quamuis etiam Heronis *βελοποιητικὰ*, quae ſit ſecutus, ibi laudet.

Quod vero ad hunc *βελοποιητικῶν* librum attinet, cum ipſi adhuc ſeruato illa Heronis inveniendarum mediarum proportionalium ratio ad calcem adtexta legatur: reſtat, vt iam de hoc quaedam dicamus. Agit autem in ipſo Hero noſter omnino de telis, ipſorumque emittendorum machinis; quarum quodam diſcrimine antea conſtituto, quo in *εὐθύτονα*, quae ſagittas tantum emittant, et *παλίντονα*, quae vel lapides, vel ſagitas ſimul et lapides eiaculentur, diſpeſcuntur:

in

in harum machinarum, et quae in ipsis adhibentur, instrumentorum singulorum fabricatione et dispositione, non modo summatim, sed et per partes describenda versatur; atque sub finem libri, de vniuscuiusque vsu et dimensionibus expositionem adhuc adiungit. De hac igitur dimensionum doctrina, cum, quae ad ipsam spectent, iam supra summatim sint explicata, non prolixo commentario indigebunt, quae profert ibi Hero, quaeque ad grauissimum, quem sectati sunt veteres Mechanici, nostri problematis soluti vsum adhuc magis declarandum hic subiicere non pigebit. Posteaquam autem omnem illam de machinarum dimensionibus praescriptionem prorsus ab experientia emanasse, atque quidem in ipsis omnia ad diametrum foraminis tonum suscipientis redire docuit, cuius quidem constituendae eas tradit methodos, quas iam supra exposuimus; vt quidem in Palintonis, si numerus minarum eius, qui mittendus sit, lapidis centuplicetur, resultantis numeri cubicum latus inueniatur, eique inuento decima pars addatur, totidem digitorum constituenda sit foraminis diametrus; in Euthytonis vero, quantum habeat longitudinis telum emittendum, ipsius nona pars diametro foraminis adsignetur: de Palintonis, vt etiam de Euthytonis, exemplum adfert, quo, cum, qui centuplicando lapidis pon-

dere eliciatur, numerus sit cubus rationalem habens radicem, secundum illam methodum per calculum res sine difficultate perficitur. Quibus igitur explicatis, etiam fieri posse, monet, vt, data vnius machinae foraminis diametro, etiam aliarum machinarum *) (quamlibet datam rationem ad illam habentium) diametri foraminum inueniantur, idque *per cubi duplicationem.* "Possunt, pergit, data quauis machina concinne fabricata, secundum illam aliae confici, hoc quidem pacto:"

"Sit datae machinae diametrus AB; oporteat autem ex hac aliam machinam construere, quae telum v. c. triplo maius eiaculetur, quam machina praedicta. Quoniam igitur tonus caussa est emittendi lapidis, oportebit [tonum] in ea, quae construenda est, machina triplicatam habere rationem ad illum, cuius diametrus est AB. Non igitur quolibet [temere facto] foramine [conficietur machina illa], sed eo, quod habeat altitudinem analogam foramini toni [machinae praedictae]; ita vt cylindri, qui ex tonis constituantur,

*) τῶν λιθοβόλων ὀργάνων addit Hero. In Euthytonis enim, cum methodus constituendi foraminis non illas difficiles numerorum operationes supponeret, vt ad geometricam constructionem confugerent, forsam non necesse habuit.

„tuantur, ſimiles ſint *). Quoniam igitur ſimi-
„les cylindri inter ſe comparati habent triplica-
„tam

*) Totum hunc Heronis locum ſatis mutilatum ita fere refingendum eſſe cenſeo: *ἐπεὶ οὖν αἴτιος ἐστιν ὁ τόνος τῆς τοῦ λίθου ἐξαποστολῆς, δεήσει ἄρα* (ſcil. *ὁ τόνος*) (*κατὰ*) *τὸ μέλλον συνίστασθαι ὄργανον τριπλασίονα λόγον ἔχειν* (*πρὸς τὸν τοῦ προειρημένου ὀργάνου τόνον*), *οὗ ἡ διάμετρός ἐστιν* AB· *οὐκ ἐν τυχόντι δὲ τρήματι* (ſubint. *κατασκευάσεται τὸ ὄργανον βάλλον τριπλάσιον βέλος τοῦ προειρημένου*), *ἀλλ' ἀνάλογον ἔχοντι τὸ ὕψος τοῦ τόνου τῷ τρήματι· ὥστε γίνεσθαι τοὺς κύλινδρους ὁμοίους τοὺς ἐκ τῶν τόνων γινομένους. ἐπεὶ οὖν ὅμοιοι κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων* cett. Quorum quidem verborum ſenſus eſt conſtituendus fere hic: Si conſtruenda eſt machina, quae eiaculetur telum triplo maius, quam machina data, cum proprie omnia ad tonum redeant, cuius vi tela emittantur: vt hic tonus quoque triplicatam habeat rationem ad tonum machinae datae, neceſſe eſt. Quoniam igitur, (cum tonorum et foraminum, quorum capacitas tonis tota expleatur, diametri fere prorſus aequales concipiantur; quemadmodum iam ſupra monitum eſt) etiam non quoduis foramen machinae illi conſtruendae adaptandum eſt, ſed tale, quod habeat altitudinem analogam foramini machinae datae: qui ita conſtituuntur ex foraminibus vel ex tonis cylindri ſecundum definit.

„tam rationem eius, quam habent diametri ba-
„sium: intelligatur iam inuenta esse quaesita fo-
„raminis diametrus ΓΔ. Itaque qui ex ΓΔ fit
„cylindrus ad cylindrum ex AB triplicatam ha-
„bebit rationem eius, quam habet ΓΔ ad AB.
„Fiat autem AB : ΓΔ = ΓΔ : EZ = EZ : HΘ. Ha-
„bebit igitur HΘ ad AB triplicatam rationem
„eius, quam habet ΓΔ ad AB; ideoque erit cy-
„lindrus ex ΓΔ: Cylindr. ex AB = HΘ : AB.
„Sed ponitur cylindrus ex AB esse tertia pars cy-
„lindri ex ΓΔ. Quare etiam AB tertia pars est
„ipsius HΘ. Data est autem AB; ergo et ipsa
„HΘ; et sunt duarum AB, HΘ duae mediae pro-
„portionales ΓΔ, EZ. Data est igitur ΓΔ. —
„Oportebit igitur in organica constructione su-
„mere HΘ triplam ipsius AB, eo quod telum
„[machinae construendae] sit triplum teli [machi-
„nae datae], atque inter AB, HΘ duas medias
„propor-

finit. 24 lib. XI. elem. Euclid. erunt similes. Vnde cum ex prop. 12 lib. XII. elem. Eucl. similes cylindri habeant triplicatam rationem eius, quam habeant diametri basium: diametrus machinae construendae ita comparata esse debet, vt, quam ad diametrum machinae datae habeat rationem, eius triplicatam habeat, qui foramine machinae construendae constituatur cylindrus ad cylindrum foramine machinae datae constitutum.

„proportionales inuenire, ipsas quidem ΓΔ, EZ;
„et erit ΓΔ quaesiti foraminis diametrus."

Quibus ita declaratis, ad exponendam nostri problematis soluendi rationem deuenit, his quidem verbis:

"Quo pacto autem inter datas duas rectas „duae mediae proportionales inueniendae sint, „deinceps dicemus."

* * *

Sint datae duae rectae AB, BΓ ad angulos rectos inter se constitutae, quarum oporteat duas medias proportionales inuenire. Compleatur rectangulum ABΓΔ, producanturque ΔΓ, ΔA. Tum applicetur ad punctum B regula secans illas rectas productas. Moueatur autem haec regula circa punctum B, donec, quae a puncto E [quod constituitur intersectione ductarum diametrorum AΓ, BΔ] vsque ad ipsas sectiones iungantur rectae, sint aequales. [Quo facto] nacta iam sit regula situm, qualem habet recta ZBH; aequales autem duae rectae sint EZ, EH. Dico ipsarum AB, BΓ rectarum medias proportionales esse AZ, ΓH; atque quidem, si ipsarum Fig. 7.

 prima

prima ſit AB, erit ſecunda AZ, tertia ΓH, et quarta BΓ.

Quoniam enim aequalis eſt AE ipſi EΔ, et ducta eſt EZ, [cum enim, ſi in triangulo aequicruro AEΔ ex puncto E dimittatur recta EΘ, in duas aequales partes ſecans angulum AEΔ, ex prop. 10 lib. I, Eucl. AΘ aequalis ſit ipſi ΘΔ; erit ex prop. 6 lib. II, Eucl. Rectang. ΔZA + Quadr. ΘA = Quadr. ΘZ; ideoque, ſi vtraque addatur Quadr. EΘ, fiet Rectang. ΔZA + Quadr. ΘA + Quadr. EΘ = Quadr. ΘZ + Quadr. EΘ; vnde, cum ſit ex prop. 47 lib. I. Eucl. Quadr. ΘA + Quadr. EΘ = Quadr. AE, et Quadr. ΘZ + Quadr. EΘ = Quadr. EZ] erit Rectang. ΔZA + Quadr. AE = Quadr. EZ; atque ex eadem ratione erit Rectang. ΔHΓ + Quadr. ΓE = Quadr. EH. Eſt autem AE = ΓE, et EZ = EH; quare et Rectang. ΔZA = Rectang ΔHΓ. Eſt igitur [ex prop. 16. lib. VI, Eucl.] HΔ : ΔZ = AZ : ΓH. Sed [ex prop. 2. lib. VI, Eucl.] HΔ : ΔZ = AB : AZ = HΓ : BΓ. Itaque erit AB : AZ = AZ : ΓH = ΓH : BΓ. Duae igitur mediae proportionales inter AB, BΓ ſunt AZ, ΓH.

* * *

Eſt

Eſt haec illa, qualis in ipſo βελοποιητικῶν libro legitur, *Heronis* Alexandrini duarum mediarum proportionalium inueniendarum ratio; quam etiam deſcripſerunt Pappus in coll. math. lib. III. prop. 5 (pag. 9 ſeq.), et Eutocius ad Archimed. de ſph. et cyl. lib. II, prop. 2. (pag. 136); alter quidem quam accuratiſſime ad ipſa prorſus auctoris verba, alter vero paulo prolixius, nonnullis adhuc illuſtrandi cauſſa, vel ab ipſo interpoſitis, vel ex illo Heronis μηχανικῶν εἰσαγωγῶν libro, quem etiam ante oculos habuit, petitis. Inuenitur autem itidem expoſita in quodem Philoponi commentarior. in Ariſtotelis analyt. poſt. codice, cuius lectiones variantes ad calcem editionis Aldinae, Venet. 1534 exhibentur (fol. 118), vbi vero teſtimonio Parmenionis Apollonio Pergaeo, de quo mox dicemus, vindicatur.

Ceterum quod ad huius ſolutionis indolem attinet, cum Heroni probe eſſet perſpectum, hocce problema ſolidum eſſe, ideoque ad perfectam ipſius ſolutionem linearum curuarum circulo altiorum deſcriptionem requiri: nihil aliud ipſi propoſitum fuiſſe apparet, quam vt per inſtrumenta mediarum continue proportionalium conſtructionem ſatis facilem et commodam, Mechanicorum vſibus inſeruientem, doceret. Patet

hoc ex Pappo pag. 7, et pag. 9, vbi ipsa Heronis verba citantur: *quoniam problema solidum est, exponemus demonstrationem ad manuum operationes maxime accomodatam.* Quare etiam, cum in ista solutione omnia redeant ad lineam rectam ZBH, quo minus per punctum B ita describatur, vt, quae faciat cum rectanguli lateribus productis intersectionum puncta Z, H, a centro E aequidistent: Hero, apud Eutocium quidem, clauum aliquem ligneum puncto B infigendum proponere legitur, circa quem regula vsque eo moueatur, donec rectas EZ, EH ex puncto E ductas abscideret aequales.

Haec igitur hactenus de illo, qui inter Geometras et Mechanicos Alexandrinos ingenio et meritis tantopere eminuit, *Herone Ctesibii*, ipsiusque studiis in problema nostrum collatis.

Cap. XV.

CAP. XV.

PHILO BYZANTINVS.

Laudatiſſimis illis Mechanicis Alexandrinis adnumerandus eſt quoque PHILO, qui, patria quidem *Byzantinus*, artis mechanicae excolendae ſtudio diu in Aegypto peregrinatus, Mechanicorum, qui tum ibi florerent, inſtitutione et diſciplina prorſus eſt imbutus. Videtur autem diſcipulis Cteſibii, vel etiam Cteſibio ipſi auditor adfuiſſe; quemadmodum in nonnullis libri ſui de telorum conſtructione locis, vbi de machinis bellicis ſollertia Cteſibii excogitatis agit (vid. vet. Math. collect. Theuenoti, pag. 68 et 72; conf. etiam pag. 77.), non obſcure innuit. Quare ipſius aetatem perperam conſtituunt ii, qui ipſum Demetrii Phalerei aequalem fuiſſe volunt, (vid. eadem vet. Math. collect. pag. XI; et Fabricii Bibl. Graeca, edit. Harleſii, Vol. IV pag. 231) teſtimonio Vitruuii in libri VII praefatione, (pag. 125 edit. Ioa. de Laet) innitentes, Philonem quidem noſtrum Byzantinum inter auctores, qui de machinationibus ſcripſerint, ibi laudantis, a quo

vero

vero alter Philo, Architectus, cuius quoque ibidem (pag. 125 et 126) mentio fit, et qui de aedium sacrarum symmetriis et de armamentario in Piraei portu scripsisse, atque, cum Demetrius Phalereus Athenis rerum potiretur, templum Eleusinae Cereris et Proserpinae ab Ictino aedificatum, ante ipsum in fronte columnis constitutis, Prostylon fecisse legitur, sedulo est discernendus.

Perhibetur autem noster Philo, tum gravissima quaeque Mechanices rationalis capita (vid. Pappi coll. math. lib. VIII, prop. 10, pag. 461, et post prop. 24, pag. 482), tum et inprimis eius ad vitae communis res translatae singulas partes commentariis illustrasse; atque quidem ex quodam opere ipsius maiori, ad Aristonem quendam scripto, exstant adhuc seruati liber quartus atque quintus, vterque in collect. vet. Math. Theuenoti, Par. 1693, pag. 43 - 107 editus. Exponit autem Philo in libro quarto, quem βελοποιϊκὰ siue ὀργανοποιϊκὰ inscripsit, de machinis bellicis, maxime catapultis balistisque, atque de ipsis ad maiorem perfectionem construendis praecepta dat, insignium sollertiusque excogitatarum machinarum aliquot descriptiones simul adiungens; in libro autem quinto de modo construendi turres, muros, fossas et valla, et de reliquis omni-

omnibus, quae ad obſidionem vtrinque ſint neceſſaria, praeparandis. Ceterum reliquorum huius operis librorum, qui temporis quidem iniuria prorſus interiere, ſinguli adhuc paſſim ab ipſo Philone citati inueniuntur (vid. pag. 59, 61, 77, 102 et 103); atque nimirum ſtatim in fronte libri quarti (pag. 52) mentio fit etiam libri primi, in quo expoſita fuiſſe peculiaris aliqua cubi duplicandi ratio indicatur, quam ibi paucis repetitam exhibere non eſt adſpernatus. Sed priusquam ad hanc Philonis rationem deſcribendam accedamus, vt, quemadmodum etiam ſupra apud Heronem fecimus, de ipſius methodo in conſtituenda foraminis diametro, cum, quae hac de re apud Philonem legantur, ab omni fere idonea illuſtratione plurimis aliena viſa ſint, antea diſpiciamus, neceſſe eſt.

Poſteaquam autem huic libro nonnulla pulchre praefatus eſt, quae ad hiſtoriam illius de machinarum bellicarum dimenſionibus doctrinae maxime pertinent: tranſit mox ad exponendam, quam ab artificibus Alexandrinis nec non Rhodienſibus edoctus vt perfectiſſimam amplexus ſit conſtituendae baliſtarum diametri methodum, quam vero ita enunciat: *τὸ τοῦ λίθου βάρος, πρὸς ὃν δέῃ τὸ ὄργανον συστήσασθαι, εἰς μονάδας (δεῖ) ἀγά-*

ἀγάγειν, καὶ τοῦ συναχθέντος πλήθους ἐκ τῶν μονάδων (γίνοιτο) ἡ πλευρά· τοσούτων δακτύλων τὴν τοῦ τρήματος διάμετρον (δεῖ) ποιεῖν, προσθέντας καὶ τὸ δέκατον μέρος τῆς εὑρεθείσης πλευρᾶς. *Pondus lapidis, ad quem construenda est machina, ad vnitates reducere oportet, et multitudinis ex vnitatibus collectae latus fiat: totidem digitorum facere oportet diametrum foraminis, addita adhuc decima parte lateris eius, quod fuerit inuentum.* Videre igitur licet hanc Philonis methodum cum illa Heronis, de qua supra vidimus, plane conspirare. Verbis enim τὸ τοῦ λίθου βάρος εἰς μονάδας ἀγάγειν, *pondus lapidis ad vnitates reducere*, nihil aliud significari potest, quam pondus lapidis ad drachmas constituere; quod, cum mina in centum drachmas fuerit diuisa, plane idem est, ac si Hero numerum minarum centuplicare praecipiat. Conueniunt etiam huic sententiae exempla, quae de diuersis singulorum lapidum emittendorum ponderibus ad illustrandam suam methodum apposuit Philo; quamuis inueniantur ipsorum plurima, ob eruendorum quidem numerorum radicalium et omnino tractandorum irrationalium difficultatem veteribus penitus inuictam, non quam accuratissime esse constituta, sed potius ita, vt tantum propemodum ad veras rationes accedant: quod etiam praemonere non neglexit, his quidem verbis:-

bis: *ἐὰν δὲ μὴ ἔχῃ ῥητὴν τὴν πλευρὰν τὸ βάρος, ὡς ἔγγιστα (δεῖ) λαμβάνειν· καὶ ἐὰν μὲν ὑπεράγῃ, τὸ δέκατον μέρος ἔλασσον (δεῖ) πειρᾶσθαι, (ὥστε εἶναι) τὸ* (pro *αὐτὸ*) *ὡς ἔγγιστα τῷ κατὰ λόγον· ἐὰν δὲ προσλείπῃ, προστιθέντα τὸ δέκατον (δεῖ) προσαναπληροῦν.* Quorum verborum ſenſus eſt fere hic: Si qui ex lapidis pondere ad vnitates reducto efficiatur numerus, non habuerit latus rationale, ſumendum eſt id, quod proxime accedit; et, ſi, qui ita eliciatur numerus, latus quaeſitum exceſſerit, quae ipſi adhuc addenda eſt decima pars, tentando diminui debet, ita vt ad numerum proportionalem quam proxime accedat; ſi vero, qui eruatur numerus, iuſto latere minor ſit, quae ipſi adhuc addenda eſt decima pars, adaugeri debet. Quibus praemiſſis, quae pro nonnullis lapidum ponderibus conſtituendae diametri adfert exempla, ita leguntur: *τοῦ μὲν δεκαμναίου (ὄντος τοῦ λίθου, ἡ διάμετρος τοῦ τρήματος ἐστὶ) δακτύλων ια'· τοῦ δὲ πεντεκαιδεκαμναίου, δακτύλων ιβ', ἡμίσους καὶ τέταρτον· τοῦ δὲ εἰκοσαμναίου, δακτύλων δεκατεσσάρων, ἡμίσους καὶ τετάρτου· τοῦ δὲ τριακονταμναίου, δακτύλων ιε', δ. τοῦ δὲ πεντηκονταμναίου, δακτύλων ιθ', καὶ τέταρτον ἡμίσους τετάρτου· τοῦ δὲ ταλαντιαίου, δακτύλων κα'· τοῦ δὲ πεντημιταλαντιαίου, δακτύλων κε'· τοῦ δὲ τριταλαντιαίου, δακτύλων κζ.* Si quidem

dem fuerit lapis 10 *minarum pondo, diametrus foraminis fiat digitorum* 11; *si vero fuerit lapis minarum* 15, *diametrus foraminis fiat digitorum* $12\frac{3}{4}$; *si minarum* 20, *diametrus foraminis digitorum* $14\frac{3}{4}$; *si minarum* 30, *diametrus foraminis digitorum* $15\frac{1}{4}$; *si minarum* 50, *diametrus foraminis digitorum* $19\frac{1}{12}$; *si vero ponderis talentaris, diametrus foraminis digitorum* 21; *si vero duorum talentorum et dimidii, diametrus foraminis digitorum* 25; *si denique trium talentorum, diametrus foraminis digitorum* 27.

Quae quidem, vt a Philone exhibentur, diametri, si accuratiori calculo fuerint examinatae, maiores paulo vel minores fieri inuenientur; v. c. in lapide 15 minarum diametrus foraminis fiet proprie digitorum 12, 56..... Est enim 15.100 =1500; et $\sqrt{}$ 1500 = 115 42...., cuius decima pars = 1, 14... si addatur, elicietur diametrus foraminis digitorum 12, 56... quae est paulo minor, quam qualis a Philone proponitur. Similiter eueniet etiam in reliquis; e quibus tamen posteriores ab accuratiori computatione iam multo magis alienae apparent. Quare, cum, vt plurima nostri auctoris sint luxata et mutilata, sic in hoc loco a librariis inprimis quoad numeros, quos modo integris verbis exprimerent, modo rursus litterarum tantum figuris declararent, nonnulla

peccata

peccata esse, fere in comperto sit: admittendas esse forsan quasdam ipsorum emendationes opinamur, quas hic paucis indicare conati sumus. Concinnandum esset igitur statim (cum accuratiori computatione, quae eliciatur machinae lapidem 20 minarum eiaculantis diametrus foraminis, sit digitorum 13, 84...) τοῦ δὲ εἰκοσαμναίου, δακτύλων δεκατριῶν, ἡμίσους καὶ τετάρτου pro δεκατεσσάρων, ἡμίσους καὶ τετάρτου, vel retinendum tantum δεκατεσσάρων, ceteris transponendo additis sequenti potius machinae 30 minarum lapidem eiaculantis diametro, ita vt haec (cum proprie esse debeat digitorum 15, 86...) legatur δακτύλων ιε΄, ἡμίσους καὶ τετάρτου, pro δακτύλων ιε΄ δ. Tum reponatur (cum machina 50 minarum lapidem emittens proprie habeat diametrum foraminis digitorum 18, 79...) τοῦ δὲ πεντεκονταμναίου δακτύλων ιη΄, ἡμίσους καὶ τετάρτου pro ιθ΄ καὶ τέταρτον ἡμίσους τετάρτου. Potuit enim, cum forte aliquis quod praecedentis diametri numero ιε΄ adiectum est δ in margine per καὶ τέταρτον explicasset, hoc postea in textum esse receptum, atque huic quidem diametro adpositum. Reliqua denique ita erunt refingenda: τοῦ δὲ ταλαντιαίου, (cuius diametrus, cum talentum sit 60 minarum, accuratius constituitur digitorum 19, 98...) δακτύλων κ΄ (abiecto α) τοῦ

δὲ πεντημιταλαντιαίου, (cuius diametrus inuenitur proprie digitorum 27, 12...) δακτύλων κζ'· τοῦ δὲ τριταλαντιαίου (cuius diametrus est proprie digitorum 28, 82...), δακτύλων κϑ'.

Sed omnes has emendationes, cum summae Arithmetices veterum imperfectioni (cuius tam insigne documentum exhibet totus hic locus), atque ipsius Philonis in computando forsan non admodum versati erroribus quid tribuendum sit, non certo definiri possit, non absolutam assequi fidem, sed ex probabilitate quadam tantum aestimari posse, ingenue fatendum est.

Ceterum cum, ob imperfectam illam Arithmetices indolem, secundum istam methodum, nec satis facile, nec accurate constitui posse plurimarum diametrorum rationes, Philo ipse probe intelligeret: si vnius saltem machinae diametrus, cum, qui ex lapidis pondere multiplicando efficeretur numerus, habuerit latus rationale, accurate fuerit constituta, reliquarum machinarum diametros geometricis potuis constructionibus inueniendas esse commendauit. *Possunt autem*, (sic enim pergit) *vbi ab vno numero, qui minimus est supradictorum, id est, a decem minarum lapide, diametrum ratione praedicta construxeris, reliquae* (i. e. reliquarum machinarum) *diametri etiam organice construi, per*

cubi

cubi quidem duplicationem; - - - - quando quidem lapidis decem minarum diametrus perfecta est numeris, qui sunt in latere cubico; decem enim (minae) *faciunt* (si centuplicentur) *millia, quorum sunt lateris decem digiti, et decima parte addita, undecim.* Quare (quod ad supplendam Philonis sententiam adhuc est adiungendum) ob haec numeri quidem denarii commoda, ista ratio diametri foraminis ad pondus decem minarum lapidis emittendi inprimis idonea est, ad quam in reliquis machinis rationes diametrorum constituantur. Verba autem ipsa graeca Philonis, satis obscura, atque interpreti latino minime intellecta, (pag. 51 et 52. vet. Math. edit. Theuenoti) ita leguntur: ἔστι δὲ καὶ ἀφ' ἑνὸς ἀριθμοῦ τῶν εἰρημένων τοῦ ἐλαχίστου συστησάμενον τὴν διάμετρον τοῖς εἰρημένοις *), λέγω δὲ τοῦ δεκαμναίου, τὰς λοιπὰς συνίστασθαι διαμέτρους ὀργανικῶς, κατὰ τὸν τοῦ κύβου διπλα-

*) τοῖς εἰρημένοις, pro ἐν τοῖς εἰρημένοις τρόποις siue μεθόδοις si accipiatur, vertendum est: *ratione praedicta.* Alias leui verborum transpositione admissa ad ea, quae sequuntur, videtur referendum esse. ἔστι δὲ - - - - συστησάμενον τὴν διάμετρου, λέγω δὲ τοῦ δεκαμναίου, τοῖς εἰρημένοις τὰς λοιπὰς συνίστασθαι διαμέτρους etc. *Possunt autem, ubi - - - - construxeris, etiam ab reliquis supradictis* (numeris) *diametri construi* etc.

πλασιασμὸν, ὡς ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ δεδηλώκαμεν, καὶ νῦν δὲ οὐκ ὀκνήσομεν ὑπογράψαι. ἐπεὶ γὰρ ἡ τοῦ δεκαμναίου διάμετρος ἐστὶν ἀπαρτιζομένη τοῖς ἀριθμοῖς τοῖς κατὰ τὴν κυβικὴν πλευρὰν *)· τὰ γὰρ δεκάκις χίλια **), ὧν γίγνονται τῆς πλευρᾶς δάκτυλοι δέκα, τοῦ δεκάτου προστεθέντος ια'.

Quae autem hic sequitur inueniendarum mediarum proportionalium ratio, cum, vt monet, iam in libro primo sit ostensa, inde repetita, atque, vt videtur, quasi in compendium redacta, pauloque obscurius exposita legitur, omni ipsius demonstratione etiam omissa; quare qualem hanc Philonis nostri solutionem accuratius et prolixius exhibet Eutocius ad Arch. de sph. et cyl. I. I. (pag. 136 sq.) exponere maluimus; qua praemissa illam ex libro quarto Philonis constructionem (ne, si

*) διάμετρος ἀπαρτιζομένη τοῖς ἀριθμοῖς τοῖς κάτα τὴν κυβικὴν πλευρὰν, diametrus, quatenus quidem constituitur inuento latere cubico, numerus par est, ideoque adhuc in integros numeros diuisibilis. Conf. Euclid. lib. VII. in deff.

**) τὰ γὰρ δεκάκις χίλια. Construendum est: τὰ γὰρ δεκάκις (scil. τῶν μνῶν ποιοῦσι) χίλια, i. e. decem minae faciunt (si centuplicentur) millia; nisi forte potius refingendum videatur τὰ γὰρ δέκα (scil. τῶν μνῶν) εἰσὶ (siue ἐστὶ) χίλια.

si qui eam ex ipso Philone cognoscere velint, istius loci obscuritate et corruptelis amplius offendantur) refictam atque restituta, quae ad ipsam pertinet, figura illustratam adhuc subiiciemus.

* * *

Sint datae duae rectae AB, BΓ, quas inter duas proportionales medias inuenire oporteat. Ponantur ita, vt rectum angulum, qui sit ad punctum B, comprehendant; at iuncta AΓ, describatur circa ipsam semicirculus ABEΓ, et ducatur ad angulos rectos, ipsi quidem BA, AΔ, ipsi vero BΓ, ΓZ. Admoueatur autem ad punctum B regula, abscindens rectas AΔ, ΓZ; eademque moueatur circa punctum B vsque eo, donec, quae a puncto B ad Δ iungatur recta, aequalis fiat rectae a puncto E ad Z iungendae, h. e. illi, quae inter circumferentiam circuli et ΓZ interiiciatur. Intelligatur igitur regula obtinuisse situm, qualem habet ΔBEZ, vbi primum fuerit, vt dictum est, ΔB ipsi EZ aequalis. Dico rectas AΔ, ΓZ medias proportionales esse inter AB, BΓ. Fig. 8.

Intelligantur enim productae esse rectae ΔA, ZΓ, et in puncto Θ concurrisse. Ma-

 nife-

nifestum vtique est, cum BA, ZΘ parallelae sint, angulum, qui ad punctum Θ est, rectum esse: ideoque fore vt, si circulus AEΓ compleatur, per punctum Θ transeat [ex Eucl. elem. lib. III, prop. 31.]. Quoniam igitur ΔB = EZ, etiam Rectang. EΔB = Rectang. BZE. Est autem Rectang. EΔB = Rectang. ΘΔA. Vtrumque enim aequale est quadrato, quod fit ex recta, quae a puncto Δ demissa circulum contingit [ex Eucl. III, prop. 36.]. Est vero etiam Rectang. BZE = Rectang. ΘZΓ; vtrumque enim pariter quadrato aequale est, quod fit ex recta, quae a puncto Z demissa circulum contingit. Itaque est quoque Rectang. ΘΔA = Rectang. ΘZΓ; et propterea ΔΘ : ΘZ = ΓZ : ΔA [ex Eucl. lib. VI, prop. 14.]. Sed ΘΔ : ΘZ = BΓ : ΓZ = ΔA : AB [ex Eucl. lib. VI, prop. 2.]. In triangulo ΔΘZ enim ducta est alteri quidem lateri ΔΘ parallela BΓ, alteri vero ΘZ, BA. Est igitur [ex Eucl. lib. V, prop. 11.] BΓ : ZΓ = ΓZ : ΔA = ΔA : AB; quod demonstrandum proponebatur.

* * *

Haec igitur est illa qualis ab Eutocio descripta est *Philonis* solutio. Locus autem ipse libri

libri quarti Philonis, in quo eadem admodum breuiter expoſita inuenitur, et qui locum illum Philonis ſupra illuſtratum ſtatim excipit, (in edit. Theuenoti, pag. 52.) ita ſe habet:

Sit quaedam linea recta data diametri, A ſcilicet *), cuius verbi gratia duplam poteſtate **) Fig. 9.

H 4 inue-

*) Eſt in hoc Philonis loco illud inſigne, quod vna eademque linea diuerſimode denotetur, modo per vnam tantum litteram adpoſitam, modo per duas litteras lineae punctis extremis adſcriptas. Sic per litteram A deſignatur linea EZ, per litteram B linea EH, et per litteram Γ linea HΓ. Littera autem K denotat et lineam EΘ, et punctum, in quo haec linea in duas partes aequales diuiſa eſt. Praeterea angulo EZH ſuperſcripta eſt littera Z, eademque littera ſuperſcripta eſt adhuc alteri puncto, in quo quidem recta, quae a Γ ad Δ ducitur, circumferentiam primum ſecat; vbi tamen ipſam, ne error oriatur, aſteriſco diſtinximus. Cum autem vtrumque hoc punctum Z in vna eademque recta ΓΔ poſitum ſit, et ipſa denique regula ΓΔ per litteram Z deſignata inuenitur.

**) *εὑρεῖν διπλασίονα δυνάμει, inuenire duplam poteſtate,* nihil aliud ſignificare poteſt, quam inuenire lineam talem, ex qua qui conſtruatur cubus, ſit duplum cubi eius, qui ex linea data A fuerit conſtructus. Memorabilis autem eſt, qui ex hoc loco comprobatur vocabuli *δύναμις* vſus, quo etiam poten-

inuenire oporteat. Illius igitur duplam posui *) illi ad angulos rectos, ipsam quidem B; et ab extremitate lineae B proieci ad angulos rectos aliam Γ interminatam; et deduxi ab angulo, super quo est Θ, rectam K, et diuisi ipsam in duas partes aequales; et sit punctum diuidens in K. Centro igitur vsus K, interuallo autem KΘ, descripsi semicirculum, qui transit etiam per angulum Z. Et sumta regula coniungo [puncta quidem Δ, Γ] sectis ambabus lineis [ΔE scilicet et ΘΓ] et seruata simul vna regulae parte supra angulum, cui superscriptum est Z. Sit autem regula, cui superpositum est Z. Circumducatur igitur regula, seruata ipsius vna parte angulum contingente, eo vsque, donec ea regulae pars, quae inde a contactu, cui superscriptum est Γ, cadit in contactum circum-

potentiam cubicam denotet, cum ex omnibus aliis locis, vbi occurrit, tantum quadratum significare creditum sit. Conff. quae monet Kaestnerus, Vir Summus, in libro (*Geschichte der Künste und Wissenschaften seit Wiederherstellung derselben u. s. w. Siebente Abtheilung. Geschichte der Mathematik u. s. w. S. 57. u. f.*)

*) *ἐθέμην, ἐξέβαλον, κατήγαγον, διεῖλον, περιέγραψα* cett. Ita loquitur respiciens ad quam in libro primo iam exhibuerat huius problematis solutionem.

circumferentiae *), cui superscriptum est Z*, **) fiat aequalis ei regulae parti, quae inde a contactu, cui superscriptum est Δ, in angulum cadit, cui superscriptum est Z. Et erit dupla potestate, linea quidem ΔE lineae EZ, linea vero ΘΓ lineae EΔ, linea autem ΘZ lineae ΓΘ ***).

* * *

Posteaquam igitur haec auctoris Byzantini inueniendarum mediarum continue proportionalium ratio satis prolixe exposita est, si de ipsius indole disquiratur, facile vnicuique pro comperto erit, Philonem, cum problema nostrum solidum esse iudicaret, (vid. Pappus in coll. math. lib. III, prop. 4.) nihil aliud spectare potuisse, quam vt mechanicam ederet constructionem, quae se a facili-

*) ἅπτεσθαι et συνάπτεσθαι dici apud veteres omnino de lineis concurrentibus, etiamsi, si producantur, se inuicem secent, satis notum est.

**) Falsa verborum interpunctione totus hic locus in editione Theuenoti adeo misere deprauatus legitur, vt sensus eliciatur plane nullus. Delendum est autem vtrumque colon, alterum quidem post ἐφ' ἧς ἡ Z', alterum vero post ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς συναφῆς.

***) Sic reponendum est pro ZE, quod habet editio Theuenoti.

cilitate et commoditate quam maxime commendaret. Quod quidem ita obtinuit, vt iſtam ſolutionem, quamuis ſit fere eadem, quae Heronis, huic tamen quodammodo, ob maiorem quidem ipſius ad vſum commoditatem, adhuc praeferendam eſſe cenſeret Eutocius. "Parallelogrammum BΘ (vid. „Fig. 8.), inquit hic Archimedis commentator l. l., „idem eſt atque illud Heronis, eaedemque ſunt „productae rectae ΘΑ, ΘΓ; eademque regula, „quae circa punctum B mouetur. Hoc vno inter „ſe differunt, quod regula in illa quidem vſque „eo circa punctum B mouebatur, donec rectas, a „puncto rectam ΑΓ in duas partes aequales ſecante, hoc eſt K, ad ΘΔ, ΘZ ductas, cuiusmodi „ſunt KΔ, KZ, aequales abſcinderet; in hac vero „vſque eo mouetur, donec ΔB ipſi EZ aequalis „fiat. Ceterum in vtraque res eodem recidit. „Sed altera, quam modo diximus, vſui accommo„datior eſt. Obtinetur enim, vt ΔB, EZ aequa„les deprehendantur, ſi regula ΔZ in aequas par„tes, easque continuas fuerit diuiſa. Quod ſane „longe facilius eſt, quam circino explorare, num, „quae a puncto K ad Δ, Z ducantur, aequa„les ſint."

Ceterum quod mirabilem illam, quam declarat Eutocius, harum ſolutionum attinet adfinitatem:

tatem: iure ſuſpicari licet, vnam eandemque perfectiorem, atque ad ſeueras Geometriae leges prorſus exactam ſolutionem, qua quidem forte hyperboles intra lineas Aſymptotos ΘΔ, ΘZ datas et per punctum B datum deſcribendae et ſemicirculi AEΓ interſectionibus in punctis quidem B, E, conſtitueretur rectae ΔZ ſitus, et Heroni et Philoni cognitam fuiſſe; quam igitur, cum Mechanicorum vſibus maxime inſeruire ſtuderent, ſectionumque conicarum in plano deſcriptiones accuratas et ſatis commodas exhibere nequirent, adumbrando, atque in inſtrumentorum operationes traducendo exprimerent.

Cap. XVI.

Cap. XVI.

APOLLONIVS PERGAEVS.

Sed vt ad Apollonivm Pergaevm iam transeamus, de quo, cum aetate praeiuerit illos, quos modo laudauimus nostri problematis organice soluendi auctores, prius nobis fuisset dicendum: videtur ab ipso duplex inueniendarum mediarum continue proportionalium exposita fuisse ratio; altera quidem, quemadmodum et naturae ipsius problematis consentaneum est, coni sectionibus superstructa, summamque Geometriae perfectionem prae se ferens, altera vero in vitae communis vsum ad instrumenta et manuales operationes prorsus accommodata. Patet hoc ex testimonio Pappi, qui in lib. 3. coll. math. prop. 4. (pag. 7.) de multorum Geometrarum in nostrum problema variis conaminibus locutus; vbi, ipsorum neminem, monet, illud per plana construere potuisse, cum natura sua esset solidum; instrumentis autem ipsum in operationem manualem, et commodam aptamque constructionem mirabiliter traductum esse ab Eratosthene, Philone, et

Herone;

Herone; ita pergit: *Hi enim asserentes, problema solidum esse, ipsius constructionem instrumentis tantum perfecerunt, congruenter Apollonio Pergaeo; qui et resolutionem eius fecit per coni sectiones.*

Seruata est autem ex hisce duabus Apollonii solutionibus apud Eutocium (in comment. in Arch. de sph. et cyl. l. l.) tantum *mechanica*, illis Heronis et Philonis fere prorsus consimilis; illius vero per *conicas sectiones* nusquam alibi (in ipsis etiam conicorum Apollonii libris nulla mediarum proportionalium inuentio proponitur), quam apud Pappum l. l. mentionem fieri inuenimus. Iure igitur mirum videri debet, *Montuclam*, V. Cel. (Histoire des Mathematiques, tom. I. pag. 197 sq.; Histoire des recherches sur la quadrature du cercle, Par. 1754. pag. 251 sqq.) non dubitare, singularem aliquam exponere, summa geometrica perfectione et elegantia insignem nostri problematis solutionem, quam Apollonio vindicet. Adfirmat quidem, quae ab Eutocio Heroni tribuatur solutio, et quae sit seuere geometrica solis, hyperboles circulo coniunctae operationibus innitens, eam potius Apollonio esse vindicandam, perspicuum fieri tum ex Pappo, qui Heroni tribuat illam mechanicam ab Eutocio adscriptam Apollo-

nio,

nio, tum ex ipſius Heronis de telis fabricandis libro, vbi eadem, quam Pappus Heroni tribuat, expoſita legatur. Sed vt hoſce libros ipſe Montucla vel plane non, vel admodum negligenter inſpexerit, alterius potius auctoritate haud idonea fretus, neceſſe eſt. Quae enim vt Heronis exhibetur ab Eutocio, eſt prorſus mechanica, planeque eadem, quae a Pappo Heroni tribuitur, quamque ex ipſius Heronis βελοποιητικῶν libro iam ſupra deſcripſimus; omninoque praeter vtramque illam Menaechmi inter ceteras, quas recenſet Eutocius; non amplius inuenitur vlla, quae conica ſectione perficiatur: ita vt, vnde hanc ſolutionem per hyperbolen tanquam Apollonii deſumſerit Montucla, plane non pro comperto nobis ſiat.

Ceterum, quod vir ille cel. plane neglexit, videtur potius ex Ioanne Philopono ad locum illum Ariſtotelis, lib. I. Analyt. poſt. cap. 7, ſupra (cap. XI) a nobis vberius explicatum, (vid. Ioannis Philoponi Commentarius in Ariſtot. analyt. poſt. Venet. ap. Aldum, 1534, folia 24) contra illius ab Eutocio Apollonio vindicatae ſolutionis genuinitatem aliqua ſuſpicio moueri poſſe, cum ille Ariſtotelis commentator teſtimonio Parmenionis cuiusdam noſtro Apollonio ſoluendi rationem longe aliam tribuat, eam videlicet, quae ſecun-

dum

dum Eutocium potius eſt Philonis Byzantini. Vt autem ſilentio praetermittamus, Eutocium, quem, admodum litterarum mathematicarum peritiorem, ſic et hac in re multo diligentiorem accuratioremque Philopono concipiendum eſſe; quippe cum hic huius problematis ſolutionum tantum obiter aliquam mentionem fecerit, ille vero proprie id egerit, vt quotquot ipſi innoteſcerent a ſummis Geometris editae illius problematis ſolutiones, maxime ex ipſis auctorum libris ſedulo colligendas accurateque deſcribendas curaret: eſt in loco Philoponi ea lectionis varietas, vt inde nihil tuto ſumi poſſit, ad Eutocii fidem vllo modo infrigendam. In alio enim Philoponi codice, cuius lectiones variantes ad calcem eiusdem editionis Aldinae, folia 117, b, ſq. deſcriptae inueniuntur, totum illud Philoponi ſcholion ad Ariſtotelis l. l. legitur admodum aliter et vberius expoſitum. Recenſetur quidem ibi primum eadem, quae apud Eutocium Philoni Byzantio vindicatur ſolvendi ratio, ſed de ipſius auctore penitus nihil monetur; tum vero adfertur adhuc altera, tanquam inſtrumentis magis accommodata, quae Apollonii noſtri eſſe teſtimonio Parmenionis *) (de quo,

*) Graeca huius loci ita ſe habent: Ἄλλως· ὀργανικωτέραν ἐκθησόμεθα γραφὴν, κατάφησιν Παρμενίων Ἀπολ-

quo, qualis fuerit ſcriptor, quaeque ipſius hac in re eſſe poſſit fides, prorſus nihil aliunde conſtat; niſi forte idem Parmenio Mechanicus, qui quoddam horologii genus *πρὸς τὰ ἱστορούμενα* appellatum inueniſſe traditur apud Vitruuium lib. IX, cap. 9. fuiſſe ſit concipiendus) adfirmatur, et quae plane eadem eſt, quam ab Eutocio Heroni Cteſibii tribui ſupra vidimus.

Quae cum ita ſint, tota illa res reuocanda eſſe videtur ad meram potius hypotheſin, quae tamen a vero haud abſimilis habenda eſt. Si enim illud concedatur, quas Heronis, Philonis et Apollonii habemus ſolutiones mechanicas, ob mirabilem inter ipſas ſimilitudinem et adfinitatem,

omnes

Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου. Quae quidem etiam ſic verti poſſunt: Aliter: *ad inſtrumenta commodiorem exponemus rationem, inquit Parmenio Apollonii Pergaei* (diſcipulus). Ita vt has ſolutiones a Parmenione in quodam libro, quem hic exſcripſerit Philoponus, traditas fuiſſe appareat; cui tamen potius ipſas tribuamus, prorſus incertum relinquatur. Sed huic interpretationi quodammodo repugnare videtur, quod in priore illo Philoponi codice (quamuis ibi de altera ſolutione ſermo ſit) ad Parmenionem vt teſtem prouocatur. *τοῦ μέντοι Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου ἐστὶν εἰς τοῦτο ἀπόδειξις ὡς Παρμενίων φησίν, ἣν καὶ ἐκθήσομεν ἔχουσαν οὕτως.*

omnes vni eidemque solutioni seuere geometricae necessario superstructas fuisse; quae forsan nulla alia fuit, quam quae hyperboles cum circulo intersectionibus innititur, atque a nobis iam supra est declarata: cum Apollonium aliquam per conicas sectiones exhibuisse nostri problematis solutionem Pappus adfirmet, magno illi Geometrae elegantissimam illam et simplicissimam vindicare solutionem, quam postea artis mechanicae in vsum ad instrumentales operationes traducere docuerint Hero, Philoque, et ipse Apollonius, quisque sua ratione, non alienum haberi potest.

Qualem igitur ita concinnauit *Apollonius* solutionem mechanicam Eutocium (edit. Oxon. pag. 137 sq.) sequuti iam exponemus.

* * *

Sint datae duae rectae, quas inter duas medias proportionales inuenire oporteat, ΒΑΓ, angulum rectum, qui est ad punctum Α, comprehendentes. Describatur centro quidem Β, interuallo vero ΑΓ, circuli circumferentia ΚΘΛ; rursusque centro Γ et interuallo ΑΒ circuli circumferentia ΜΘΝ, quae quidem illam ΚΘΛ secet in puncto Θ; et iungantur ΘΑ, ΘΒ, ΘΓ. Parallelo- Fig. 10.

 gram-

grammum igitur eſt ΒΓ, ipſius autem diametrus ΘΑ. Secetur ΘΑ in puncto Ξ in duas partes aequales; et centro Ξ deſcribatur circulus, qui ſecet rectas ΑΒ, ΑΓ productas ad puncta Δ, Ε; ita quidem vt puncta Δ, Ε et Θ in directo iaceant. Hoc autem fiet, ſi regula ſecans rectas ΑΔ, ΑΕ, vſque eo moueatur circa punctum Θ, donec quae a puncto Ξ ad Δ, Ε ducantur rectae, aequales fiant. Quod quando contigerit, confectum erit, quod quaeritur, [et erunt ſcilicet ΓΕ, ΒΔ duae mediae proportionales inter datas ΒΑΓ].

Demonſtrationem autem plane omittere non dubitat Eutocius. Cum enim conſtructio ſit plane eadem, quae Heronis et Philonis, quas paulo ante expoſuiſſet: eandem quoque ipſi, monet, conuenire demonſtrationem.

Cap. XVII.

ERATOSTHENES.

Ex multis et grauiſſimis de omni fere litterarum elegantiorum genere meritis quae redundauit ad Eratosthenem ſumma laus nominisque fama, aucta ea eſt non parum inſigni ſucceſſu, quo capaciſſimum et ſollertiſſimum huius viri ingenium etiam ſeueriores Matheſeos, omnesque et ſingulas, quae huic arctiore cognationis vinculo coniunctae habentur, diſciplinas excoluit. Vt autem hic praetermittamus praeclariſſima, quae ipſius laudantur induſtriae maxime in Geographia et Aſtronomia collocatae monumenta; quorum quidem ex teſauro quae pauca ad nos deuoluta ſunt ramenta, amiſſorum deſiderium adauxiſſe potius, quam vllo modo expleuiſſe videntur: exhibet ſtudii, quod Geometriae tribuit, ſpecimen ſatis memorabile quae ab ipſo ſoluendi problematis noſtri edita fuit ratio, omnibus litterarum antiquarum cultoribus, ἀγεωμετρήτοις pariter ac geometris, ſatis nobilitata atque celebrata. Cum enim in ſumma, qua gauderet iſtis temporibus

 pro-

problema noſtrum celebritate, maxime ob grauiſſimum ipſius vſum in rebus mechanicis et architectonicis, qui etiam de hoc diſciplinarum genere ſcriptis optime meruiſſe traditur Eratoſthenes, (vid. Scholiaſt. Apollon. Rhod. ad lib. I, v. 567, et lib. III, v. 232.) in illam quaeſtionem incidiſſet: in ipſa ſoluenda eam gloriam inprimis adſectaſſe videtur, vt, cum, quas antiquorum Geometrarum cognoſceret huius problematis ſolutiones, hae ob difficiles et inſtrumentis nimis incommodas conſtructiones ipſi minime probarentur, ipſe peculiarem aliquam conſtitueret rationem, quae a geometrica ſimplicitate ſummaque ad manibus efficiendum commoditate et facilitate prae ceteris quam maxime ſe commendaret. Quod cum haberet propoſitum, in quam indagando delatus eſt mediarum continue proportionalium conſtructionem a reliquorum Geometrarum rationibus prorſus diuerſam, inſtrumento quodam ſatis ingenioſe concinnato efficiendam, in hac adeo ſibi placuit, vt inſtrumentum ipſum ex aere factum in templo quodam ex columna dedicata publice ſuſpenderet, ſimulque inſcriptione huic columnae inciſa rationem iſtam paucis declarandam, ſeque eius inuentorem carmine adſcripto poſteritatis memoriae commendandum curaret. Quod cum tanquam publice actum rumore et fama

ſama etiam apud illitteratos huius aeui homines diuulgaretur, virorum vero doctorum ſermonibus et diſputationibus inprimis agitaretur: non potuit non ad ipſius regis Aegypti, *Ptolemaei* (III) *Euergetae* aures peruenire, qui, quo omnino litterarum teneretur ſtudio et amore, de hoc nouo auctoris Cyrenaici inuento, quemadmodum etiam de donario, inuenti illius interprete et nuntio, in templo deorum conſecrato, accuratiora edoceri cupiit. Cui regis deſiderio vt ſatisfieret, ſcripta eſt ab Eratoſthene *epiſtola* de tota hac re ſatis docte et prolixe exponens, quae (vt videtur, integre) deſcripta legitur apud Eutocium in comment. in Archimed. de ſph. et cyl. lib. II, prop. 2. (pag. 144 ſqq. edit. Oxon.) In hac igitur recenſenda vt paulo diligentius verſemur, neceſſe eſt.

Exorſus autem de iis, quae ad cubi duplicandi ſpectant hiſtoriam, poſteaquam pro inſigni, qua floruit doctrinae copia lectionisque varietate, quae de priſca huius quaeſtionis origine ex veterum Tragicorum fabulis traderentur, expoſuit, Hippocratemque Chium primum fuiſſe monuit, qui cubi duplicationem ad duarum mediarum continue proportionalium inuentionem reuocandam eſſe, animaduerteret: quae poſt oraculum Apollinis de duplicanda ara Deliis editum a Geome-

 tris

tris in Academia Platonis, Archyta, Eudoxo, et Menaechmo ad hanc quaestionem soluendam prolata sint, breuiter indicat; quos quidem omnes rem propositam demonstrando euincere, non vero manu perficere vsuique accommodare potuisse adfirmat. Huiusmodi instrumentalem vitaeque communis vsibus magis accommodatam rationem ab ipso potius esse excogitatam; qua etiam non solum duae, sed quot aliquis imperauerit, proportionales mediae facillime constitui possint. Qualis igitur huius problematis solutio cum fuerit inuenta, quae inde oriatur vtilitas, tum omnino omni solidorum doctrinae, tum et inprimis singulis vitae communis rebus, veluti ad constituendas humidorum siccorumque mensuras, dimetiendaque Deorum templa, maximeque arti tormentoriae ad constituendum catapultarum balistarumque effectum, paucis adhuc declarat; denique ad exponendam suam inueniendarum mediarum proportionalium rationem transit, quae est fere haec:

* * *

Fig. 11. Sint datae duae rectae inaequales, ΑΕ, ΔΘ, quas inter duas medias continue proportionales inuenire oporteat. Ponatur ΑΕ ad angulos rectos super recta aliqua ΕΘ; et

et constituantur super EΘ tria parallelogramma deinceps posita AZ, ZI, IΘ; ducanturque in iis diametri AZ, AH, IΘ, quae quidem parallelae inuicem erunt. Itaque manente, quod in medio est, parallelogrammo ZI immoto, agatur extremorum parallelogrammorum alterum quidem AZ supra medium, alterum vero IΘ infra medium; vt in secunda figura, donec puncta A, B, Γ, Δ in directo iaceant: et ducatur per haec puncta A, B, Γ, Δ recta, quae cum EΘ producta in puncto K concurrat. Fig. 12.

Erit igitur [ex prop. 2. lib. VI; et prop. 18. lib. V. Euclid.], in parallelis quidem AE, ZB [in triangulo AEK] AK : KB = EK : KZ; in parallelis vero AZ, BH [in triangulo AZK] AK : KB = ZK : KH. Quare [ex prop. 11. lib. V. Eucl.] AK : KB = EK : KZ = ZK : KH.

Rursus quoniam, in parallelis quidem BZ, ΓH [in triangulo AEK] BK : KΓ = ZK : KH; in parallelis vero BH, ΓΘ [in triangulo AZK] BK : KΓ = HK : KΘ; ideo BK : KΓ = ZK : KH = HK : KΘ.

Sed [erat supra] ZK : HK = EK : KZ. Vnde etiam EK : KZ = ZK : KH = HK : KΘ.

Est autem [ex prop. 4. lib. VI. Eucl.] EK : KZ = AE : BZ; et ZK : KH = BZ : ΓH; denique HK : KΘ = ΓH : ΔΘ. Itaque erit etiam AE : BZ = BZ : ΓH = ΓH : ΔΘ. Inuentae sunt igitur inter AE, ΔΘ duae mediae BZ, ΓH.

* * *

Quam igitur mediarum proportionalium inveniendarum rationem in libro de *geometricis Superficiebus* (τῶν γεωμετρουμένων ἐπιφανειῶν) ostensam esse, postea quam monuit Eratosthenes: pergit iam ad explicandam *Instrumenti* sui, ad sumendas secundum illam rationem medias proportionales excogitati, indolem et fabricationem his quidem verbis:

"Vt autem etiam per instrumentum duae „mediae sumi possint, elaboretur tabula (πλινθίον) „lignea, vel eburnea, vel aerea, in qua sint „aequales tres tabellae (πινακίσκοι) quam maxime „exiles; quarum media fixa sit, duae vero aliae „in canalibus mobiles, ea magnitudine eaque „proportione, qua cuique libuerit; demonstratio „enim similiter conficietur *). Vt autem lineae „quam

*) τοῖς δὲ μεγέθεσι καὶ ταῖς συμμετρίαις, ὡς ἕκαστοι ἑαυτοὺς πείθουσι· τὰ μὲν γὰρ τῆς ἀποδείξεως ὡσαύτως συντε-

„quam accuratiſſime conſtituantur, illud diligenter „animaduertendum eſt, vt tabellis inuicem ſub„euntibus omnia parallela maneant, eademque „non hiantia, ſed aequa lege inter ſe aptata et „connexa."

Hac inſtrumenti ſui fabricatione declarata, verſatur adhuc paululum in deſcribendo eo, quod in templo obtulerat *donario;* in quo quidem monet eſſe inſtrumentum ex aere factum, idque plumbo ferruminatum ſub ipſa columnae corona adaptatum; infra ipſum autem inſculptam legi demonſtrationem breuiore ſermone expoſitam vna cum figura, et poſt hanc epigramma. Haec igitur, vt tota res de donario penitus cognoſcatur, ſub finem epiſtolae accurate deſcripta adhuc adiiciuntur.

συντελεῖται. *Senſ.* Non neceſſe eſt, vt tabellae eandem habeant magnitudinem et dimenſionem, quam habent quae ſunt in figura noſtra; poſſunt v. c. ipſarum baſes EZ, ZH, HΘ etiam maiores eſſe, quam ipſarum altitudines AE, ZΛ, IH; poſſunt porro tabellae (ſint dummodo inter ſe aequales) rhombiformes conſtitui et triangulae. Talia omnia eſſe poſſunt, quemadmodum vnicuique libuerit: et in demonſtratione ipſa nihil mutant. — Interpretes latini, atque ex his etiam *Torellus* (in edit. Oxon.) huius loci ſententiam perperam conſtituere.

Quae autem columnae incisa fuit demonstratio est prorsus eadem, quae modo exposita est, nisi quod forte videatur admodum in compendium redacta, atque vt ipsius instrumenti ibidem suspensi vsum doceat maxime comparata. Quare in ipsa ostênditur etiam, si duarum datarum maior non fuerit aequalis ipsi AE, ad quam constituta est tabellarum in instrumento altitudo: quomodo tum nihilominus ope eiusdem instrumenti illarum duae mediae proportionales constitui possint. Ἐὰν δὲ αἱ δοθεῖσαι μὴ ἴσαι ὦσι ταῖς ΑΕ, ΔΘ, ποιήσαντες αὐταῖς ἀνάλογον τὰς ΑΕ, ΔΘ, τούτων ληψόμεθα τὰς μέσας, καὶ ἐπανοίσομεν ἐπ' ἐκείνας, καὶ ἐσόμεθα πεποιηκότες τὸ ἐπιταχθέν. *Quodsi datae rectae non fuerint aequales ipsis* ΑΕ, ΔΘ; *vbi illis proportionales fecerimus* ΑΕ, ΔΘ, *inter has sumemus duas medias proportionales, et transferendo ad illas id quod propositum est perficiemus.*

Sint igitur, vt quae hic praecipit Eratosthenes exemplo illustremus, ipsis ΑΕ, ΔΘ inaequales duae datae αε, δθ, quas inter duae mediae continue proportionales π, ρ sint inueniendae. Constituantur ΑΕ, ΔΘ in instrumento ita, vt sit $ΑΕ : ΔΘ = αε : δθ$. Tum inter ipsas ΑΕ, ΔΘ ita constitutas sumantur in instrumento methodo supra exposita duae mediae continue proportionales, ita

vt

vt ſit ΑΕ : ΒΖ = ΒΖ : ΓΗ = ΓΗ : ΔΘ. Quibus inuentis, cum ſit ΑΕ : ΒΖ = αε : π, et ΑΕ : ΓΗ = αε : ρ; ex prop. 12. lib. VI. Euclid. facillime conſtituentur etiam duae mediae proportionales π, ρ inter duas datas αε, δϑ.

Indicat denique paucis haec inſcriptio, ſi plures adhuc mediae proportionales inueniendae proponantur, hoc quidem ita perfici, vt tabellae vna plures, quam quae inueniri debeant mediae proportionales, in inſtrumento diſponantur.

* * *

Haec fere ſunt, quae notanda habuimus de laudatiſſima illa Eratoſthenis epiſtola; quae quantopere redoleat multae variaeque doctrinae oſtentationem, orationisque copiam et ornatum, qualis ab hoc auctore ſane potuerit expectari, non eſt, quod pluribus doceamus. In exponenda autem ipſa problematis ſolutione Eratoſthenem ſemper eam ſectatum eſſe perſpicuitatem et ſubtilitatem, quae alias ſcriptis mathematicis propriae eſſe ſoleant, certe in ipſis iure exigantur; non omnino adfirmare auſim. Quae enim de parallelogrammis tradit quadam ratione inter ſe mouendis, (ad quae potiſſimum in conſtituendis mediis proportionalibus omnia redeunt) vt praetereamus, ea

omnino

omnino satis obscure et breuiter esse enunciata; sunt ea inprimis necessario ita supplenda, si quidem ista solutio a geometrica indole non prorsus aliena videri debeat, vt illa parallelogramma ita moueri supponantur, vt semper in vno eodemque plano maneant. Quod cum ab Eratosthene non verbis expressis monitum sit, videtur ea re forsan eo magis adductus esse Nicomedes, qui in totam hanc Eratosthenis inuentionem teste Eutocio ad Archimedem (pag. 146 edit. Oxon.) acerbissime grassatus est, vt ipsam τῆς γεωμετρικῆς ἕξεως ἐστερομένην iudicaret. Quae reprehensio tamen in ipsam non aliter cadere posse videtur, quam quatenus, cum quomodo sola rectae et circuli ope rectangula AZ, IΘ ita moueantur, vt, ducta recta AΔ, rectae AZ, BH, ΓΘ inuicem sint parallelae, nequaquam animo concipi possit, nec alia demonstrata sit linea, qua illud idonee perfici posse intelligatur; iis quidem nostri problematis constructionibus, quae ad omnem Geometriae seueritatem et perfectionem exactae aestimantur, nullomodo aequiparanda, in numerum mechanicarum potius solutionum referenda est. Hac igitur ex parte cum sit proprie diiudicanda, quod et ipse Eratosthenes innuere videtur, qui ab instrumenti facilitate et promptitudine constructionem suam adeo enixe commendat: quamuis et

hanc

hanc laudem ei eripere conetur. Nicomedes, cur tamen inferior habenda ſit ceteris ſolutionibus mechanicis, plane non videmus. Minus iniquum autem de ipſa iudicium tulit Vitruvius, qui in libri IX. cap. 3. (pag. 178 ſqq. edit. Ioa. de Laet) Eratoſthenem ex iis, qui mathematicis inuentis de genere humano optime meruerint, laudans, hunc, quemadmodum ceteris inuentionibus hominum gratiam ſibi conciliauerit, ſic hac Meſolabi inuentione ſummam admirationem concitaſſe adfirmat.

Ceterum, quod monere eſt praetermiſſum, legitur eadem haec Eratoſthenis ratio etiam deſcripta apud Pappum in libro III. collect. math. prop. 5; vbi quidem ita aliter exponitur, vt tum pro parallelogrammis triangula rectangula adhibeantur, tum primum triangulum immotum maneat, reliquaque moueantur: quo tamen nec in ſolutione ipſa, nec in eius demonſtratione quidquam mutatur; quemadmodum ſimili modo etiam vltimum triangulum potuiſſet conſtituere immotum, reliquis ſe mouentibus.

* * *

Sed

Sed priusquam hanc de Eratoſthene eiusque mediarum proportionalium inueniendarum ratione tam ſagaciter excogitata expoſitionem iam penitus abſoluamus: reſtat adhuc, vt de nobiliſſimo illo EPIGRAMMATE, quo inuentionem ſuam celebrare voluerit, diſpiciamus; quod, quale ad calcem epiſtolae ad Ptolemaeum regem apud Eutocium legatur, ſi accuratius deſcriptum, verſioneque et annotationibus illuſtratum hic ſubiiciamus, rem nec a noſtri libelli argumento alienam, nec lectoribus plane ingratam atque iniucundam facturi eſſe nobis videmur. Eſt enim in hac ipſa, quam ſcribimus, problematis de cubo duplicando hiſtoria monumentum tam graue et excellens, quod huic hiſtoriae illuſtrationem adfundit, rurſusque ex ipſa petit, vt non ſolum veniam nobis dandam eſſe, ſi ad illud prolixiori commentario explanandum paululum digrediamur, ſed potius, ſi illud penitus inexplicatum praetermittamus, in meritiſſimas nos incurrere reprehenſiones ſtatuendum ſit. Accedit quod hocce carmen, quamuis a viris doctis ſaepius fuerit agitatum, nunquam tamen idonea verſione et commentario inſtructum prodiit. Adfirmat hoc etiam *Petrus Ferroni* V. Cel. qui in epiſtola ad *A. M. Lorgna*, cel. ſocietatis Veronenſis praeſidem, (vidd. *Memorie di Matematica e Fiſica della Societa Italiana*, Tomo VII, Verona,

1794.

1794. pag. 319 sqq.) nonnulla, quae ad singulorum problematum historiam eorumque solutiones diiudicandas spectant, recensens, de hoc epigrammate (pag. 340.) ita loquitur, "Cade il „Secolo XVIII, ed è ancora mistero l'interpre„tazione sincera dell' Epigramma al Re *Tolomeo* „*d'Eratostene di Cirene*, conseruatoci da *Eutocio* „*d'Ascalona*, lasciato senza versione dai Tradut„tori, e comprendente il Voto (Ἀναθήμα) sospeso „sù d'una Colonna in ringraziamento agli Dei per „la soluzione del Problema Deliaco." Legitur autem hoc epigramma in iis Archimedis editionibus, quae simul adiunctos habent commentarios graecos Eutocii; in quibus autem omnibus, licet sint et graeco-latinae, immo et in nouissima et plenissima, quae ex recensione Torelli, Oxonii, 1792. euulgata est, versio ipsius reperitur plane nulla. Prostat quidem adhuc seorsum editum ad calcem *Arati cura Ioannis Felli* (Oxon. 1672.), vbi pag. 33 sqq. tota Eratosthenis epistola simul descripta est; quemadmodum etiam in *Francisci Vietae operibus mathematicis*, quae *Franciscus a Schooten* edidit, Lugd. Batav. 1646, pag. 349; atque denique recentissime retractatum et castigatum in *Analectis veterum poetarum graecorum Brunckii*, Argent. 1772, tom. I, pag. 478; nullibi autem ad ipsius illustrationem quaedam adlata esse

vidi-

vidimus. Vnica, quae nobis forte innotuit, huius carminis versio latina est *Petri Rami*, (in eius *schola mathematica*, Francof. 1627, pag. 24 sq.) quamuis satis mendosa omnique commentario prorsus destituta; quae Petri Ferroni indaginem effugisse videtur. Narrat autem idem hic vir cel. in epistola illa ad A. M. Lorgna, *Antonium Mariam Salvini* et *Vicentium Viviani* coniunctis viribus, sed frustra ad illustrandum hoc epigramma esse annisos; quod quidem apparere ex quodam horum virorum autographo, inter ipsius Ferroni schedas adhuc exstante. "*Anton Maria Salvini*, inquit l.l. „e *Vincenzo Viviani* mutuamente ajutandosi, non „furon valevoli a interpretarlo, come aparisce „da un MS. originale, che conservo tra le mie „schede." Et ibidem in Nota: "Salvini doveva „essere molto giovane, quando prese a tradurre „quell' Epigramma con avere al fianco il Viviani. „Imperocchè la versione incomincia: *Supplemen„tum Epistolae Eutocii Ascalonitae Ammonio Phi„losopho inscriptae, ex interpretatione Cl. Adolesc. „Ant. Mariae Salvini.* È però vero che il Salvini „si fece assai presto distinguere per eccellente „Grecista avendo di soli 23 anni (e vale a dire nel „1669, perché nacque del 1646) ottenuta nello „studio Fiorentino la Cattedra di lingua Greca."

Quid

Quid vero in illa verſionis ſuae inſcriptione ſatis alienā ſequutus ſit Salvini, vt quodammodo diuinari poſſit, in animum ſane reuocandum eſt, Eutocii Aſcalonitae in vtrumque Archimedis de ſphaera et cylindro librum commentarios, in quibus hoc Eratoſthenis carmen vna cum tota epiſtola tranſcriptum exhibetur, Ammonio Philoſopho fuiſſe inſcriptos.

Sed iam vacat ipſum *Eratoſthenis* hic ſubiicere *carmen*, quod excipient *verſio latina* et *annotationes*; quibus num adhuc ante ipſum ſeculi XVIII, decurſum omnino apertum ſit et exploratum hocce carmen interpretandi myſterium, docti et aequi iudicent lectores.

ΕΠΙΓΡΑΜΜΑ.

Εἰ κύβον ἐξ ὀλίγου διπλάσιον, ὦ 'γαθὲ, τεύχειν
Φράζεαι, τὴν στερεὴν πᾶσαν ἐς ἄλλο φύσιν
Εὖ μεταμορφῶσαι, τόδε τοι πάρα, κἂν σύ γε μάνδρην,
Ἢ σιρὸν, ἢ κοίλου φρείατος εὐρὺ κύτος
Τῇδ' ἀναμετρήσαιο, μέσας ὅτι τέρμασιν ἄκροις.
Συνδρομάδας δισσῶν ἐντὸς ἕλης κανόνων.

E quatuor codicibus operum Archimedis Bibliothecae Parisiensis (quorum lectiones variantes vna cum iis codicis Florentini ad calcem editionis nouissimae Oxoniensis operum Archimedis quam accuratissime descriptae exhibentur) habet codex 2359 hocce Epigramma inscriptum: στίχοι ἥρῳ ἐλεγεῖοι. Plerumque autem citatur a viris doctis *Epigramma Eratosthenis de Cubi duplicatione*; quemadmodum tota epistola inscripta legitur: Ἐρατοσθένους τοῦ κύβου Διπλασιασμός.

Vers. 1. διπλάσιον repugnat metro, cum antepenultima sit breuis. Vid. Theocrit. XII, 26. Cod. Florent. habet διπλήσιον, quod tamen alibi non occurrit. Alias reponendum esset διπλάσσιον.

VERSIO LATINA.

Si cubum breui tempore duplum, o optime, construere
Vis, ita vt omnis figura solida in aliam
Bene possit transformari: hoc tibi perficietur, et si stabulum,
Aut granarium subterraneum, aut cauae cisternae altum spatium
Hoc (instrumento) metiri velis, quando medias terminis extremis
Concurrentes intra duplices sumseris regulas.

Vers. 2. Φράζεαι metro iubente legendum est vt dissyllabum, vel scribendum Φράζῃ. Cod. Florent. et Parisiensis 2350 Φράζεται.

Vers. 3. τόδε. Edit. Oxon. perperam τάδε.

Vers. 4. σιρὸν. Edit. Basil. σεῖρον.

Vers. 5. τέρμασιν. Apud Vietam τέρχασιν, nullo sensu.

Μηδὲ σύ γ' Ἀρχύτεω δυσμάχανα ἔργα κυλίνδρων,
Μηδὲ Μενεχμείους κωνοτομεῖν τριάδας
Δίζηαι· μηδ' εἴ τι θεουδέος Εὐδόξοιο
Καμπύλον ἐν γραμμαῖς εἶδος ἀναγράφεται.
Τοῖςδε δέ τ' ἐν πινάκεσσι μεσόγραφα μυρία τεύχοις
Ῥεῖά κεν, ἐκ παύρου πυθμένος ἀρχόμενος.
Εὐαίων Πτολεμαῖε πατὴρ, ὅτι παιδὶ συνηβῶν
Πάνθ' ὅσα καὶ Μούσαις καὶ βασιλεῦσι φίλα

Verſ. 7. δυσμάχανα. Edit. Baſil. et Vieta δυσμήχανα.

Verſ. 8. Μενεχμείους. Apud Proclum pag. 31, vbi adfertur hic verſus, Μεναιχμείους, de quo vid. infra Commentar.

Verſ. 9. θεουδέος. Edit. Baſil. et Vieta θεοῦ δέος.

Verſ. 10. ἐν γράμμαῖς. Edit. Baſil. Vieta et Fellus ἐγγραμμαῖς.

Verſ. 11. Τοῖςδε δέ τ' ἐν, Fellus Τοῖςδε σὺ ἐν; et Vieta Τρῖς δέ τε ἐν; ſed male. Editt. Baſ. et Oxon. et Brunckius Τοῖςδε δὲ ἐν. Sed metrum neceſſario requirit Τοῖςδε δέ τ' ἐν.

Ne tu Archytae difficillimis operationibus cylindrorum,

Ne Menaechmaeis in cono secandis ternariis

Operam impendas; neque si qua diuini Eudoxi

Curua in lineis species describitur.

Hisce autem in tabellis media infinita construas

Commode, inde a paruo fundo exorsus.

Felix Ptolemaee pater, quod filio vna pubescens,

Quaecunque et Musis et Regibus cara sunt,

Vers. 12. κεν. Cod. Paris. 2360 μὲν. παύρου. Apud Vietam ταύρου, nisi forte sit potius error Typographi.

Vers. 13. Πτολεμαῖε. Edit. Basil. Πτολεμαῖς. συνηβῶν. Ita recte refingitur ex Cod. Florent. tribusque codd. Parisiens. 2359, 2361 et 2362. Olim legebatur συνήων. Cod. Paris. 2360 habet σϋνή-μων; Fellus συνήδων.

Αὐτὸς ἐδωρήσω· τὸ δ' ἐς ὕστερον, οὐράνιε Ζεῦ,
Καὶ σκήπτρων ἐκ σῆς ἀντιάσειε χερός.
Καὶ τὰ μὲν ὡς τελέοιτο. Λέγοι δέ τις ἄνθεμα λεύσσων·
Τοῦ Κυρηναίου τοῦτ' Ἐρατοσθένεος.

Verſ. 17. Poſt τελέοιτο neceſſario interpungendum eſt.

ἄνθεμα λεύσσων. Cel. Brunckius λεύσων. Cod. Florent. ἀνθ'εμα λεύσων, quod transpoſito apoſtropho ortum videtur ex ἄν'θεμα λεύσων.

Ipſe largitus es! Impoſterum autem, o coeleſtis
Iupiter,
Et ſceptra ex tua accipiat manu!
Et haec quidem ita perficiantur! Dicat autem quis
donarium videns:
Cyrenaei hoc eſt Eratoſthenis.

COMMENTARIVS.

Argumentum.

Docet in hoc carmine Eratoſthenes, cubi duplicationem, aliaque, quae huic innitantur Stereometriae problemata, in vitae communis vſus grauiſſima, hoc inſtrumento, ſecundum rationem iſtam perfici; verſ. 1-6. Non igitur opus eſſe Archytae, Menaechmi et Eudoxi difficilioribus ſolutionibus; verſ. 7-10. Hoc ſuo inſtrumento etiam inſuper infinita media proportionalia facillime conſtitui poſſe; verſ. 11 et 12. Sub finem autem carminis Ptolemaeo regi adhuc argutiſſime blanditur; atque denique ſe ipſe huius anathematis auctorem profitetur.

Verſ. 1-6.

(ὥστε) εὖ μεταμορφῶσαι πᾶσαν τὴν φύσιν στερεὴν ἐς ἄλλο.] φύσις στερεὰ i. q. σχῆμα στερεὸν, figura ſolida. ἐς ἄλλο pro ἐς ἄλλην φύσιν στερεάν. Duplex autem verborum conſtitui poteſt ſenſus. Si enim μεταμορφοῦν accipiatur h. l. ſignificare omnino *mutare*, et poſt ἐς ἄλλο fere ſubaudiatur στερεὸν μεῖζον ἢ ἔλασσον κατὰ πάντα δοθέντα λόγον: ſenſus erit: *vt poſſis commode mutare quamvis figuram ſolidam in aliam data quauis ratione minorem aut maiorem, manente tamen eius forma externa;*

externa, v. c. conum in conum data ratione minorem aut maiorem. Notum enim esse debet ex ipsa huius libri introductione, cum veteres Mathematici delati essent ad inuestigandum de duplicandis, aut ad quamuis datam rationem constituendis figuris solidis: eos mox omnem hanc quaestionem in cubum, quippe figuram solidam maxime regularem, transtulisse, qui si commode duplicari, aut ad quamuis datam rationem constitui posse ostenderetur, inde optime elici posse intelligentes ad quamcunque aliam figuram solidam data ratione mutandam. *Altera* ratio haec est, vt ἐς ἄλλο dictum sit pro, *in figuram solidam alius formae externae, eiusdem vero magnitudinis;* veluti, si postuletur conum vel cylindrum in sphaeram aequalem mutare, quod problema apud *Archimedem in lib. II. de sph. et cyl. prop. 2.* nostro problemati de inueniendis duabus mediis proportionalibus penitus superstructum est. Quae cum ita sint, cum quidem ex rationibus mathematicis vterque sensus aeque sit admittendus, verba vero ipsa graeca nihil ad decernendum suggerant (nisi forte propria significatio vocis μεταμορφοῦν, qua est *transformare, formam externam mutare*, posteriorem sensum magis commendare videatur): habendus est Eratosthenes hic tantum omnino summam problematis de cubi duplicatione in Stereometria

vim et vtilitatem indicare; quam iam supra in ipsa epistola prolixius et accuratius declarauit. Τούτου δὲ εὑρισκομένου, inquit ibi de cubo duplicando, δυνησόμεθα καθόλου τὸ δοθὲν στερεὸν παραλληλογράμμοις περιεχόμενον εἰς κύβον καθιστᾶναι, ἢ ἐξ ἑτέρου εἰς ἕτερον σχηματίζειν, καὶ ὅμοιον ποιεῖν, καὶ ἐπαύξειν διατηροῦντας τὴν ὁμοιότητα.

Κἂν σύ γε μάνδρην, Ἢ σιρὸν, ἢ κοίλου φρείατος εὐρὺ κύτος Τῇδ' ἀναμετρήσαιο.] Celebrant hi versus insignem illum duplicationis cubi vsum ad dimetiendas multas vitae communis res, e quibus quae hic nominantur, fere in genus aedificiorum domesticorum referri possunt. Μάνδρα, stabulum; σιρὸς, aedificii subterranei genus, in quo condita frumenta asseruari solebant; et φρέαρ, puteus (pro quo ornatius κοίλου φρείατος εὐρὺ κύτος). Conf. vbi in epistola eundem hunc cubi duplicationis vsum exposuit: ὥστε καὶ βωμοὺς, καὶ ναοὺς, δυνησόμεθα δὲ καὶ τὰ τῶν ὑγρῶν μέτρα, καὶ ξηρῶν, λέγω δὲ οἷον μετρητὴν μέδιμνον, εἰς κύβον καθιστᾶναι, καὶ διὰ τῆς τούτου πλευρᾶς ἀναμετρεῖν τὰ τούτων δεκτικὰ ἀγγεῖα, πόσον χωρεῖ.

Τῇδ' ἀναμετρήσαιο. Subintelligendum est ὀργανικῇ (εὑρέσει), *hoc instrumento mesolabio*, superne sub ipsa columnae corona suspenso; ita vt Eratosthenes accipiatur, vt fere vbique in hoc epigram-

grammate, loquutus esse *δεικτικῶς*. Aliter post τῆδ' subaudiatur *μεθόδῳ*, vt vel ad sequentia trahatur: *hac ratione*, quae quidem declaratur simul verbis illis, *μέσας ὅτι τέρμασιν* etc.; vel ad praecedentia: *hac ratione*, qua quidem cubo duplicando quaeuis figura solida in aliam potest mutari. Ceterum adhuc etiam constitui potest: τῆδ' scil. *φύσει στερεᾷ* (*κυβικῇ*), vt totus locus ita accipiatur: *etiam si hac figura solida* (*cubica*) *s. hoc cubo* (i. e. reducendo in cubum) *stabulum, aut gran. subt. aut put. dimetiri velis*. Ex omnibus hisce rationibus, quarum nulla penitus incommoda est, praeferatur, quae vnicuique magis arriserit.

Τόδε τοι πάρα (pro *παρέσται*), ὅτι ἕλης — grammatica constructione sunt iungenda; omninoque sententiarum nexus in toto loco ita fere est constituendus: Si vis cubum duplicare, vt quamlibet figuram solidam in aliam transformare possis, et si (quod cubo duplicando prorsus innititur) stabulum, aut granarium subterraneum, aut puteum dimetiri vis: hoc tibi perficietur, si sumseris etc.

Μέσας ὅτι τέρμασιν ἄκροις Συνδρομάδας διασᾶν ἐντὸς ἕλης κανόνων.] Locus est paulo obscurior. Eratosthenem hic declarare velle rationem

suam

ſuam noſtri problematis ſoluendi, facile perſpicitur. Summa autem huius rationis, vt rem paulo altius repetamus, in eo verſatur, vt efficiatur triangulum ΑΕΚ (in figura ſecunda), in quo baſis ΑΕ, et quae baſi parallelae ductae ſint rectae ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ, eo interuallo inter ſe inuicem diſtent, vt rectae ΑΖ, ΒΗ, ΓΘ, (quarum vnaquaeque binarum ex ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ puncta coniungit extrema) ſibi inuicem quoque ſint parallelae. Sic enim et ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ inter ſe inuicem ſunt in proportione continua, et ΑΖ, ΒΗ, ΓΘ inter ſe; vt igitur ſit *illarum* proportio, ΑΕ : ΒΖ = ΒΖ : ΓΗ = ΓΗ : ΔΘ; *harum*, ΑΖ : ΒΗ = ΒΗ : ΓΘ. Quibus praemiſſis totum locum iam recte explicari poſſe opinamur. *Ὅτε ἕλῃς ἐντὸς διϲσῶν κανόνων μέσας συνδρομάδας (ἐν) τέρμασιν ἄκροις*, *ſi ſumſeris intra duas regulas* (ΑΜ et ΕΘ, vel ſi malis ΑΔ et ΕΘ) *medias* (videlicet ΒΖ, ΓΗ et ΒΗ; e quibus ΒΖ et ΓΗ ſunt mediae continue proportionales in priore proportione, ΒΗ vero media continue proportionalis in poſteriore proportione) *concurrentes in extremis terminis* i. e. punctis. (Concurrunt enim hae tres mediae ΒΖ et ΓΗ prioris proportionis et ΒΗ poſterioris in punctis ipſarum extremis Β et Η.) — — Sic ex indole quam maxime propria ſuam ſolutionem ſatis ingenioſe deſignaſſe intelligitur Eratoſthenes.

Fig. 12.

Verſ.

Verſ. 7 - 10.

Μηδὲ σύ γ' Ἀρχύτεω δυσμήχανα ἔργα κυλίνδρων.] De ratione Archytae, qua conſtituit medias proportionales motu quodam ſemicirculi, cui in ſuperficie ſemicylindri latus coni occurrit, expoſitum eſt ſupra cap. VIII; vbi, opera cylindrorum Archytae ab Eratoſthene iure appellari δυσμήχανα, quippe quae manibus aegre efficiantur, jam eſt animaduerſum.

Μηδὲ Μενεχμείους κωνοτομεῖν τριάδας Δίζηαι, *neque tribus lineis curuis Menaechmi in cono ſecandis* (ad perficiendam cubi duplicationem) *operam impendas.* Μενέχμειοι τριάδες deſignant nobiliſſimas illas tres coni ſectiones, parabolam, hyperbolam et ellipſin, quarum naturam et conſtitutionem cum tanta ſagacitate et ſollertia primus indagaſſet Menaechmus, iis adhibitis perfectiores et ad omnem legum geometricarum ſeueritatem exactas noſtri problematis ſolutiones primus quoque edidiſſe habendus eſt; quarum vero, ob difficillimam harum ſectionum conicarum in plano deſcriptionem, fere nullus in vita communi potuit eſſe vſus. Vid. ſupra cap. X, vbi illas Menaechmi ſolutiones recenſuimus. Conff. etiam quae cap. VI. de vindicanda Menaechmo ſectionum conicarum inuentione prolixius a nobis ſunt diſputata. Citatur hic Eratoſthenis verſus apud *Proclum* p. 31,

vbi

vbi vero legitur Μεναιχμίους, quemadmodum vbique in Proclo scribitur Μέναιχμος, quod sane videtur esse praeferendum. Sed cum in lectionibus variantibus ad calcem editionis Oxoniensis operum Archimedis nihil de illo notatum reperiatur, in epigrammate graeco mutare noluimus,

Μηδ' εἴ τι θεουδέος Εὐδόξοιο Καμπύλον ἐν γραμμαῖς εἶδος ἀναγράφεται.] De Eudoxi Cnidii, quem Eratosthenes hic cognomine *diuini* ornat, linearum curuarum singulari genere, cuius inuentor exstitit, et de ratione, qua ad soluendum problema nostrum illas curuas adhibuerit, Eutocio eam respuente, prorsus nihil certi tenemus. Vid. supra cap. IX.

Vers. 11 et 12.

Ἐκ παύρου πυθμένος ἀρχόμενος, *inde a paruo fundo, a parua radice exorsus*. Sens. Datis tantum duabus rectis, nostro instrumento visus, infinitas medias proportionales adinuenire potes. Ceterum hoc quidem ita perfici, vt in instrumento tabellae adhiberentur vna plures, quam quae exigerentur mediae proportionales, iam supra ex Eratosthenis epistola notauimus.

Vers. 13 - 18.

Εὐαίων Πτολεμαῖε πατὴρ, ὅτι παιδὶ συνηβῶν Πάνθ' ὅσα καὶ Μούσαις καὶ βασιλεῦσι φίλα Αὐτὸς

τὸς ἰδωρήσω·] Beatum praedicat Ptolemaeum, quoniam huic regi contigerit, vt ipse iuuenili vigore adhuc florens (quasi filio vna pubescens), filii iuvenis animum bonis artibus imbuendum curaret, eumque omnibus ornamentis et deliciis regalis luxus et magnificentiae accumularet. Fuit autem, quem hic patrem vocat, et cui tota epistola inscripta est, sine dubio *Ptolemaeus* (III.) *Euergetes*, vltimus ille e bonis Aegypti regibus, qui nostrum Eratosthenem Athenis Alexandriam arcessiuit, ibique summo honore adfectum bibliothecae praefecit (Vidd. *Suidas*, voce Ἐρατοσθένης, edit. Colon. Allobrog. 1619. tom. I, pag. 1032; et *Strabo*, pag. 1195. edit. Theodori ab Almeloveen); filius vero *Philopator*, qui, quamuis euaserit luxuriae omnique corruptelae deditissimus (vnde cognominatus fuit *Tryphon*), litterarum tamen studium ex paterna disciplina retinuit.

Τὸ δ' ἐς ὕστερον, οὐράνιε Ζεῦ etc.] Ad summam Ptolemaei patris felicitatem penitus consummandam, vt imposterum etiam dilectissimum filium successorem in regno nanciscatur, a Jove precatur Eratosthenes; atque sub finem carminis se ipse huius donarii auctorem iis, qui illud forte sint inspecturi, profitetur.

Cap. XVIII.

Cap. XVIII.

NICOMEDES.

Post nobilissima et grauissima conamina, quae a schola Mathematicorum Platonica et Alexandrina ad cubi duplicationem perficiendam edita esse vidimus, hanc quaestionem retractare atque denuo soluendam experiri non adspernati sunt Geometrae nonnulli eximii; quorum vero laboribus hac in re collocatis, factum est, vt et ipsa Mathesis adhuc nouis et praeclarissimis incrementis augeretur et amplificaretur. Cum enim sentirent, quae ad istius problematis constructionem tanta sollertia et adsiduitate antea essent excultae sectiones conicae, eas ob summam difficultatem, qua in plano describerentur, penitus nullam hac in re vitae communi praestare vtilitatem; instrumentales vero illae solutiones, ex Geometriae dignitate nullomodo habendae, ipsorum desiderium minime opplerent, nedum vlterioribus inquisitionibus caussam tollere possent: ad reliquas lineas curuas, quibus ex veterum sententia *loci lineares* constituuntur, et quae hactenus (si Archimedis pauco-

paucorumque aliorum Geometrarum industriam ipsis impensam excipias) fere penitus fuerant neglectae, considerandas, num forsan harum ope vna cum summa Geometriae perfectione faciliores in plano ederentur constructiones, delati sunt NICOMEDES et DIOCLES, quorum alter *Conchoidis*, alter *Cissoidis* inter haec studia exstitit inuentor.

Quod autem ad NICOMEDEM attinet, de eius quidem aetate nihil certi constat, nisi quod non multo post Eratosthenem vixisse videatur. Cum enim in huius Geometrae inueniendarum mediarum proportionalium rationem grassari perhibeatur (apud Eutocium ad Archimedis de sph. et cyl. lib. II, p. 2; pag. 146. edit. Oxon.); de lineis autem conchoidibus ab ipso excogitatis vberior expositio iam a Gemino fuerit conscripta (quod tradit Proclus in I Euclid. pag. 31): sequitur, vt hic noster Nicomedes Eratosthene quidem iunior, antiquior autem Gemino circiter in secundum ante C. N. seculum sit referendus. Similiter de ipsius patria, vnde fuerit natus, vel terra, vbi potissimum vixerit; si forte coniecturis locus sit admittendus, hanc Mysiam fuisse vel Bithyniam contenderem. Videntur enim hoc suadere vel ipsum nostri Geometrae nomen in istis terris ex ipsorum regum exemplo satis celebre et nobilitatum,

et illae aduersus Eratosthenem acerbissimae disceptationes, quales tum omnino viris doctis in regum Attalicorum aula viuentibus cum Alexandrinis Ptolemaeorum gratiam captantibus intercessere.

Sed quamuis de omnibus hisce rebus, quemadmodum de ceteris eius vitae conditionibus nihil certi videatur esse eruendum: de praeclarissima tamen lineae conchoidis inuentione et constitutione nostro Nicomedi omni iure attribuenda, quemadmodum de summa, qua excelluit Geometriae cognitione, inprimisque methodi illius analyticae peritia, nullo modo dubitari potest. Hanc enim in ipsa sua, quam mox exponemus, mediarum proportionalium inueniendarum ratione, reuocando quidem hoc problemate ad illud, quo, quomodo inter crura dati anguli ponatur recta magnitudine data, quae producta transeat per datum punctum, exigitur, maxima cum sollertiae sagacitatisque laude monstrauit; de illa autem conchoidis inuentione Nicomedi vindicanda idonea praebent testimonia Pappus et Proclus: quorum quidem alter in collect. math. lib. IV, prop. 22. huius lineae naturam vsumque docens, Nicomedem eam, vt quidem cubi duplicationem perficeret, excogitasse adfirmat, simulque illam ope huius lineae a Nicomede concinnatam cubi duplicandi

plicandi rationem, quam iam ſupra in lib. III, prop. 4. expoſuerat, rurſus deſcribere non adſpernatur; alter vero in lib. I. Euclid. prop. 9. (pag. 73), qua datum angulum rectilineum biſariam ſecare proponitur, de anguli triſectione, huiusque problematis difficultatibus dum etiam nonnulla monet, Nicomedem ope linearum conchoidum, quarum propriam et peculiarem naturam primus indagaſſet (ἑυρετὴς ὢν τῆς ἰδιότητος αὐτῶν), omnem angulum rectilineum trifariam ſecuiſſe, harumque linearum ortum, conſtitutionem et proprietates ſingulari libro explicaſſe tradit. Hunc librum citat quoque Eutocius in Commentar. in Archimed. de ſph. et cyl. lib. II. prop. 2. (pag. 146. ed. Oxon. γράφει δὲ καὶ Νικομήδης ἐν τῷ ἐπιγεγραμμένῳ πρὸς αὐτοῦ περὶ κογχοειδῶν συγγράμματι), qui inde Nicomedis ſolutionem noſtri problematis, dum quae ad ipſam intelligendam de lineae conchoidis conſtitutione et proprietatibus neceſſario tenenda ſunt, ſimul ex iſto libro petita praemittit, vberius, quam Pappus, deſcriptam exhibet; quemque, cum inſuper Graeca Pappi adhuc vſque inedita ſint, expoſitione noſtra ſequemur.

* * *

Intelligendae ſunt duae regulae ad angulos rectos ita inter ſe compactae, vt in vno Fig. 18.

 eodem-

eodemque iaceant plano *), cuiusmodi sunt AB; ΓΔ; atque quidem in AB [intelligendus est esse] canalis securiculatus **), in quo clauus ***) moueri possit; in ΓΔ vero

ab

*) ἐπιφάνεια pro ἐπίπεδον, quod saepius apud veteres Mathematicos occurit.

**) σωλῆνα πελεκινοειδῆ scil. χρὴ νοεῖν. πελεκινοειδής i. q. πελεκοειδής, (quod etiam habet Cod. Paris. 2359) *securim referens, securiculae figuram imitans.* Latine diximus vno verbo vsi *securiculatus*, ita quidem vt h. l. significare debeat *securiculae formae edolatus*, non vero, vt alias, *securicula compactus.* Intelligendus est igitur canalis infra quidem in regula paululum dilatatus, supra autem magis coarctatus.

***) ἐχελώνιον s. χελώνιον, pro quo etiam dicitur χελωνάριον, in rebus architectonicis saepius occurrit, videturque omnino de eiusmodi instrumentis adhibitum esse, quae vllam similitudinem cum tegumento testudinis animalis habere existimata sunt. Vidd. Heronis Belopoeica, in collect. vet. Math. Theuenoti, pag. 124, 130 et 132, ibique Notae Bernardini Baldi; Aristotelis mechan. quaest. XXVIII; Vitruuii de Architect. lib. X, capp. 2, 5 et 15, ibique Lexic. Vitruu. Hoc loco nihil aliud significare potest, quam quoddam claui vel paxilli genus, quod canali, in quo moueri debet, ad securiculae figuram constituto congruenter factum,

infra

ab ea parte, in qua est Δ; atque quidem in recta, quae media ipsius [regulae] latitudinem diuidit, [intelligendus est] pusillus cylindrus regulae infixus, atque e superficie eiusdem regulae paululum exstans. Intelligenda est item alia regula, qualis EZ, paruo quodam interuallo ab ipsius termino Z rimam habens HΘ, quae circa cylindrum Δ circumagi possit; et in puncto E foramen rotundum, cui inseri debet axiculus clauo, qui in canale securiculato, qui in AB est, mouetur, infixus. Accommodata igitur regula EZ, qua quidem rima HΘ est, ad cylindrum Δ; qua vero foramen E, ad axiculum clauo infixum: si quis, sumto regulae huius extremo K, eam moueat versus partes A, deinde versus partes B; punctum quidem E continuo agetur in regula AB; rima vero HΘ circa cylindrum Δ mouebitur; cum vtique recta, quae media diuidit regulam EZ, in isto motu semper per axem cylindri Δ transire intelligatur, reliqua vero regulae pars EK continuo eadem maneat.

infra quidem in crassiorem fere orbiculum, testudinis quandam imaginem referentem, extenditur, supra vero paululum extenuatur, donec in axiculum abit, foramini rotundo E regulae EZ insertum.

maneat. Si igitur in puncto K intelligamus graphium aliquod parimentum contingere: describetur quaedam linea, cuiusmodi est ΛMN, quam Nicomedes *primam conchoidem lineam* vocat, atque quidem magnitudinem regulae EK vocat *interuallum lineae*, punctum vero Δ *polum*.

Huic igitur *lineae* duo haec potissimum contingere demonstrat:

I. *Vt ad regulam* AB *continuo magis magisque accedat;*

II. *et si qua recta inter regulam* AB *et ipsam ducatur, ab hac omnino secetur.*

Fig. 14. Horum autem *primum* facile deprehendi potest in altera figura, in qua AB regula esse intelligitur; Γ polus; ΔE interuallum; denique ZEH linea conchoides. Cadant a puncto Γ duae rectae ΓΘ, ΓZ, aequalibus, videlicet KΘ, ΛZ. Dico normalem ZM normali ΘN minorem esse. Cum enim sit angulus MΛΓ > angulo NKΓ [ex prop. 16. lib. I, Eucl.], qui reliquus est ad duos rectos MΛZ est < reliquo NKΘ [ex prop. 13. lib. I, Eucl.]. Atque propterea cum recti sint anguli ad puncta M, N; [cum in quo-

vis

vis triangulo omnes anguli duobus rectis aequales esse debeant, ex prop. 32. lib. I, Euclid.] angulus ad punctum Z > angulo ad punctum Θ. Quodsi angulo ad Θ aequalis constituatur angulus MZΞ; erit KΘ, hoc est ΛZ : ΘN = ΞZ : ZM [ex prop. 4. lib. VI, Eucl.]. Quare [cum sit ZΛ > ZΞ; quod sequitur ex prop. 19. lib. I. Euclid. quoniam angulus ZΞΛ, qui ex prop. 6. lib. I. Eucl. est obtusus, > angulo ΞΛZ] erit ZΛ : ΘN < ZΛ : ZM; ideoque [ex prop. 10. lib. V, Eucl.] ΘN > ZM.

Alterum erat: rectam, quae inter AB *et lineam ducatur, lineam ipsam secare;* quod quidem hoc pacto manifestum fit. Quae enim ducitur recta, aut parallela est ipsi AB, aut non. Sit primo parallela, qualis ZHΘ. Fig. 15.
Fiat autem ΔH : HΓ = ΔE ad aliam quandam, veluti K [ex prop. 12. lib. VI, Eucl.]; et centro quidem Γ, intervallo vero K quae descripta sit circumferentia, secet ZH in puncto Z; et iungatur ΓZ. [Secare autem debet circumferentia rectam ZH, cum sit ΔH : HΓ = ΔE : K, h. e. ΓZ, atque permutando ΔH : ΔE = HΓ : ΓZ, et sic fiat HΓ < ΓZ] Est igitur [ex prop. 2. lib. VI, Eucl.]

ΔH : HΓ = ΔZ : ZΓ. Sed erat ΔH : HΓ = ΔE : K, h. e. ΓZ. Itaque [ex prop. 9. lib. V. Euclid.] ΔE = ΔZ; quod fieri non potest. Oportet enim punctum Z ad lineam esse.

At vero quae ducatur recta, parallela non sit, qualis est MHN; et ducatur per punctum H, ZH ipsi AB parallela. Occurret igitur ZH ipsi lineae, atque adeo multo magis MN.

Quae igitur cum ex instrumenti constructione consequantur, quod in rem nostram facit, hoc pacto demonstratur.

Fig. 16. *Dato rursus angulo* A, *punctoque* Γ *extra ipsum: ducere rectam* ΓH; *atque in ea* KH *datae aequalem efficere.*

Ducatur a puncto Γ ad AB normalis ΓΘ, eaque producatur. Sit autem datae aequalis ΔΘ: et polo quidem Γ, interuallo autem data ΔΘ, denique regula AB, describatur prima conchoides linea EΔZ. Concurret igitur cum ipsa AH, quemadmodum iam demonstratum est. Concurrat in puncto H, et iungatur ΓH. Aequalis est igitur KH datae.

Hocce problema quomodo ope lineae conchoidis apud Nicomedem perficeretur, postea-

quam

quam ita ostensum est: ad ipsum; quae ad hoc problema penitus reuocata est, Nicomedis mediarum proportionalium inueniendarum rationem describendam iam pergit Eutocius, his quidem verbis:

Quae cum sit demonstrata, dentur duae rectae $\Gamma\Lambda$, ΛA ad angulos inter se inuicem rectos, quas inter duas medias continue proportionales inuenire oporteat. Fig. 17. Compleatur parallelogrammum $AB\Gamma\Lambda$; et secetur vtraque AB, $B\Gamma$ in duas aequas partes punctis Δ, E; et iuncta $\Delta\Lambda$ producatur, atque concurrat cum ΓB producta in puncto H. Ipsi autem $B\Gamma$ ad angulos rectos fiat EZ; et ducatur ΓZ aequalis ipsi $A\Delta$; et iungatur ZH, eidemque parallela $\Gamma\Theta$. Dato autem angulo $K\Gamma\Theta$, punctoque Z, ducatur recta $Z\Theta K$, quae efficiat ΘK aequalem ipsi $A\Delta$ vel ΓZ. Hoc enim per lineam conchoidem fieri posse demonstratum est. Denique iuncta $K\Lambda$ producatur, et concurrat in puncto M cum AB producta. Dico se habere $\Gamma\Lambda : K\Gamma = K\Gamma : MA = MA : A\Lambda$.

Cum $B\Gamma$ secta sit in puncto E in duas partes aequales, eique addita $K\Gamma$; est Rectang. $BK\Gamma$ + Quadr. ΓE = Quadr. EK [ex prop. 6.

 lib.

lib. II. Eucl.]. Communè addatur Quadr. EZ. Tum erit Rectang. BKΓ + Quadr. ΓE + Quadr. EZ = Quadr. KE + Quadr. EZ, h. e. Rectang. BKΓ + Quadr. ΓZ = Quadr. KZ [ex prop. 47. lib. I. Eucl.]. Et cum sit [in triangulo quidem BMK, ex prop. 2. lib. VI. Eucl.] MA : AB = MΛ : ΛK, et MΛ : ΛK = BΓ : ΓK; erit etiam [ex prop. 11. lib. V. Eucl.] MA : AB = BΓ : ΓK. Est autem ipsius quidem AB dimidia AΔ; ipsius vero BΓ dupla ΓH, quoniam etiam ΛΓ ipsius AΔ est dupla. [Est scilicet in triangulo HΛΓ ex prop. 4. lib. VI. Eucl. ΓΛ : ΓH = ΔB : BH, et permutando ex prop. 16. lib. V. Eucl. ΓΛ : ΔB = ΓH : BH]. Erit igitur etiam MA : AΔ = HΓ : ΓK *). Sed HΓ : ΓK = ZΘ : ΘK, propter parallelas HZ, ΓΘ [ex prop. 2. lib. VI. Eucl.]. Ideoque [ex prop. 11. lib. V. Eucl. MA : AΔ = ZΘ : ΘK,

atque]

*) Quod si cui non satis manifestum sit, ita prolixius poterit demonstrari: Erat supra MA : AB = BΓ : ΓK. Vnde etiam $\frac{1}{2}$MA : $\frac{1}{2}$AB = BΓ : ΓK; et permutando $\frac{1}{2}$MA : BΓ = $\frac{1}{2}$AB : ΓK. Atque etiam MA : 2BΓ = $\frac{1}{2}$AB : ΓK. Vnde permutando MA : $\frac{1}{2}$AB = 2BΓ : ΓK. Est autem $\frac{1}{2}$AB = AΔ, et 2BΓ = ΓH. Quare etiam MA : AΔ = HΓ : ΓK.

atque] componendo [ex prop. 18. lib. V. Eucl.] $M\Delta : \Delta A = ZK : K\Theta$. Ponitur autem $A\Delta = \Theta K$, cum sit $A\Delta = \Gamma Z$. Est igitur [ex prop. 9. lib. V. Eucl.] etiam $M\Delta = ZK$; ideoque Quadr. $M\Delta$ = Quadr. ZK. Est autem Quadr. $M\Delta$ = Rectang. BMA + Quadr. ΔA [ex prop. 6. lib. II. Eucl.]. Ostensum autem est Quadr. ZK = Rectang. $BK\Gamma$ + Quadr. ΓZ. Quare est Rectang. BMA + Quadr. $A\Delta$ = Rectang. $BK\Gamma$ + Quadr. ΓZ. Est autem, cum posita sit $A\Delta = \Gamma Z$, etiam Quadr. $A\Delta$ = Quadr. ΓZ. Est igitur Rectang. BMA = Rectang. $BK\Gamma$; ideoque $MB : BK = K\Gamma : AM$ [ex prop. 14. lib. VI. Eucl.]. Est autem $BM : BK = \Gamma\Lambda : \Gamma K$ [ex prop. 4. lib. VI. Eucl.]. Vnde etiam $\Gamma\Lambda : \Gamma K = \Gamma K : \Lambda M$ [ex prop. 11. lib. V. Eucl.]. At est etiam $\Lambda\Gamma : \Gamma K = MA : A\Lambda$ [ex prop. 4. lib. VI. Eucl.] Itaque erit $\Lambda\Gamma : \Gamma K = \Gamma K : AM = AM : A\Lambda$.

* * *

In hac, quam iam exposuimus, mediarum proportionalium inueniendarum ratione idem resumsisse intelligitur *Nicomedes* diagramma, quod iam antea adhibuere Hero, Philo atque Apollonius;

nius; ipsarum autem linearum mediarum ΓK, AM constitutionem non quidem, quemadmodum hi, incertis tentaminibus, vel mechanico quodam artificio, sed idonea potius et constanti lineae suae conchoidis descriptione, eximia apud plerosque Geometrarum perfectionis et simplicitatis cum laude, est adsequutus.

Ceterum etiam hac sua conchoide vsus esse perhibetur ad soluendum aliud non minus celebre problema, quod de anguli trisectione dicitur. Huius rei testis est (praeter Proclum in lib. I. Eucl. prop. 9, quem iam supra laudauimus) Pappus in collect. math. lib. III. prop. 4. (pag. 7); qui in alio libro non seruato etiam hanc Nicomedis demonstrationem descripsit forsan vel potius adumbrauit; quod certe coniicere licet ex coll. math. lib. IV, post prop. 22, vbi dicit: *nos in Analemma Diodori, cum vellemus angulum tripartito secare, praedicta linea vsi sumus.* Quamuis igitur ipsa ratio, quam in adhibenda conchoide ad anguli trisectionem sequutus sit Nicomedes, non accuratius cognosci possit: tamen eam omnino ita comparatam fuisse, vt pariter ac supra in cubo duplicando ad hanc reuocaretur, qua inter crura dati anguli recta magnitudine data, quae producta transiret per datum punctum, ponenda ostenderetur, satis certo diuinari potest; adeo vt vni

eidem-

eidemque difficultati subiectam vtriusque huius nobilissimi et in Geometria grauissimi problematis, de cubi quidem duplicatione et de anguli trisectione, solutionem docuisse non immerito in laudem nostro Nicomedi vertatur. Confirmatus est etiam recentioribus temporibus hic lineae conchoidis ad constructionem problematum solidorum vsus grauissimo summi Neutoni adsensu: qui, cum sola descriptionis facilitate, non vero aequationum, quae singulis curuis conuenirent, simplicitate aestimandum esse contenderet, quae curuae ad problematum constructiones potius essent admittendae, lineamque conchoidem nulli curuae praeter circulum hac descriptionis simplicitate et facilitate cedere censeret; ipse simili ratione, qua Nicomedes, praemissa quidem etiam eiusdem problematis lemmatici, quo inter datas duas lineas angulum comprehendentes recta datae longitudinis, quae producta transeat per datum punctum, ponenda exigitur, solutione per conchoidis et coni sectionum (quibus tamen conchoidem multo praeferendam ducit) descriptiones confecta, omnes tertii et quarti gradus aequationes summa perfectione et elegantia construere docuit. Conf. Neutoni Arithmetica vniuersalis, in appendice de aequationum constructione lineari, pag. 257 sqq. edit. Castillionei, Amst. 1761.

Cap. XIX.

Cap. XIX.

DIOCLES.

Ex iis, qui nostri problematis perficiendi studio ad excogitandum et constituendum singulare linearum curuarum genus delati esse dicuntur, restat adhuc DIOCLES; de cuius aetate quae tradunt historiae mathematicae scriptores, quemadmodum reliqua, quae de ipso perhibent, (quae quidem, cum veterum auctorum testimonia fere penitus desint, satis pauca sunt eaque minus certa) vt ad paulo accuratius examen reuocentur, videtur necesse esse. Si enim, quod faciunt eorum plerique, ipsum quinto demum post Christum natum seculo vixisse adsumunt; (Conf. *G. I. Vossii* liber de scientiis mathematicis, Amst. 1660, pag. 331; *Heilbronneri* historia Matheseos vniuersae, Lips. 1742, pag. 381; *Montucla* Histoire des Mathematiques, Tom. I. p. 192 et 328; *eiusdemque* Histoire de la quadrature du cercle, pag. 258.) inde quod apud Pappum nulla Dioclis mentio fiat, hunc certe Pappo juniorem fuisse, argumentantes: hoc quam lubricum sit et vagum, iam per se satis apparet.

apparet. Aduerſatur etiam illorum ſententiae penitus, quod Pappo iam cognitam fuiſſe illam lineam Ciſſoidem a Diocle inuentam ex nonnullis Collect. math. locis abunde perſpicitur. Conferantur quae de nobiliſſimo problematum diſcrimine, quo in plana, ſolida et linearia diſpeſcuntur, agunt lib. IV, prop. 30 (pag. 95) atque lib. III. prop. 4. (pag. 7), vbi, quod inter reliquos, quos laudet, noſtri problematis ſoluendi auctores Dioclem penitus ſilentio praeterierit Pappus, non eſt profecto, quod mireris; quippe qui ſine dubio ſuſpicionem, acſi ſuam mediarum proportionalium inueniendarum rationem ex illa Dioclis adumbrauerit, dum iſtam Dioclis ignorare ſimularet, quam maxime amouere cuperet. Sed vnde Dioclis aetas adhuc multo antiquior conſtituitur, eſt locus ille Procli laudatiſſimus (pag. 31), vbi in illis, quae ex Gemino transſcribuntur, linearum diuiſionibus non ſolum lineae Ciſſoidis mentio fit, ſed etiam huius lineae, quemadmodum quoque linearum conchoidum et ſpiricarum, ortum a Gemino in ipſius libris Geometricis iam explicatum fuiſſe indicatur *); ita vt qui ad hanc lineam conſtituendam indagando primus ſit delatus, ipſius aetas vel

*) ἐπεὶ, dicit ibi Proclus de Gemino, καὶ τὰς γενέσεις τῶν σπειρικῶν γραμμῶν, καὶ τῶν κογχοειδῶν καὶ τῶν κισσοειδῶν παραδίδωσι.

vel in primum, quo ineunte floruerit Geminus, vel potius in secundum ante Christum natum referenda sit seculum. Ad quod igitur iam omnia redeunt, nostrum Dioclem etiam iure haberi Cissoidis inuentorem, hoc nemo sane in controuersiam vocabit, qui paulo integrius inspexerit Dioclis, quae apud Eutocium descripta est, mediarum proportionalium inuehiendarum rationem, cui quidem Cissoidis, tanquam curuae recens inuentae nec Geometris adhuc cognitae, originem et constructionem explicatam praemittit; eandemque hanc sententiam amplexi sunt fere omnes recentioris aeui scriptores mathematici, paucis tantum exceptis, qui cissoidis, vt conchoidis, inuentionem Gemino sine vlla auctoritate antiqua adscripserunt. Vid. G. W. Krafftii Institutiones Geometriae sublimioris, Tubingae, 1753, pag. 38.

Sed ne quae contra totam hanc nostram argumentationem forte non sine aliqua veri specie moueri possint, cum a nemine adhuc vsque prolata esse videantur, consulto a nobis occultari habeantur: ad illum Procli locum (pag. 31) vt denuo attentos faciamus lectores eruditos, necesse est, num quae ibi de Cissoide tradantur, etiam lineae hodie hoc nomine celebratae conuenire intelligantur. Si enim paulo accuratius perlustra-

verimus

verimus totum iſtum locum (in cuius vberiorem criſin, cum tot ac tantis fere penitus ſcateat mendis et corruptelis librariorum ſocordia admiſſis, hic deſcendere nimis longum foret): illud a nobis mox erit animaduerſum, a Gemino, cuius varias de linearum diuiſionibus ſententias ibi adfert Proclus, Ciſſoidem appellari lineam *compoſitam* (σύνθετον) i. e. *refractam angulumque efficientem* (κεκλασμένην καὶ γωνίαν ποιοῦσαν), atque *quae* (quemadmodum etiam circulus et ellipſis) *figuram deſcribat* *); moxque rurſus (ſecundum aliam diuiſionem) lineam *miſtam*, (cuius quidem definitionem Geminus ipſe pag. 29 ita conſtituit, vt ſit linea, quae ex diſſimilibus oriatur motibus, ἐξ ἀνομοίων κινη-

*) In editione Procli cum haec nimis vitioſe expreſſa legantur, immo etiam poſt verba illa: καὶ γωνίαν ποιοῦσαν, multa penitus omiſſa ſint, quo totius loci ſenſus admodum turbatur: graeca ipſa reſtituta et emendatius deſcripta hic ſubiunximus. Διαιρεῖ δὲ αὐτὴν γραμμὴν ὁ Γεμῖνος, πρῶτον μὲν εἰς τὴν ἀσύνθετον καὶ τὴν σύνθετον. καλεῖ δὲ σύνθετον τὴν κεκλασμένην καὶ γωνίαν ποιοῦσαν· τὰς δὲ λοιπὰς αὐτῶν πάσας, ἀσυνθέτους. ἔπειτα δὲ τὴν σύνθετον (ſcil. διαιρεῖ) εἰς τὴν σχῆμα ποιοῦσαν, καὶ τὴν ἐπ' ἄπειρον ἐκβαλλομένην, σχῆμα λέγων ποιεῖν, κυκλικὴν, τὴν τοῦ θυρεοῦ, τὴν κιττοειδῆ· μὴ ποιεῖν δὲ cett.

κινήσεων; ad quam igitur, praeter rectam et circularem, quas lineas *ſimplices* appellarunt veteres, omnes reliquae lineae fuere referendae) *quae in plano deſcripta in ſeſe concurrat.* (τῆς δὲ μικτῆς, τὴν μὲν ἐν τοῖς ἐπιπέδοις εἶναι, τὴν δὲ ἐν τοῖς στερεοῖς· καὶ τῆς ἐν ἐπιπέδοις, τὴν μὲν ἐν αὑτῇ συμπίπτειν, ὡς τὴν κισσοειδῆ, τὴν δὲ ἐπ' ἄπειρον ἐκβάλλεσθαι cett.)

Quae quidem omnia quomodo in noſtram Ciſſoidem cadere poſſint, paulo accuratiori diſquiſitione ſane indigere videtur. Eſt autem illius ante omnia ratio habenda, ne, in quo ſaepiſſime peccatur, iſtam perfectam et abſolutam huius lineae cognitionem, qualis recentiorum Geometrarum ſtudiis eruta eſt, atque nimirum faciliorem et perfectiorem, quae a Neutono primum conſtituta eſt, huius lineae conſtructionem, qua lineam aſymptoton nacta in infinitum producitur, atque quidem lineis tertii gradus adnumeratur, (vid. Neutoni Arithmetica vniuerſalis, edit. Caſtillionei, Amſt. 1761. tom. I, pag. 256 ſqq.) antiquis illis temporibus iam attribuamus. Fuit potius apud antiquos linea Ciſſoides ab ea recentiorum ita fere diuerſa, vt ipſam tantum tanquam lineam in circulo deſcriptam contemplarentur, quam vero extra circulum producere neſcirent; quod etiam perſpici-

spicitur ex ipsa Dioclis huius lineae construendae ratione, quae alias cum illa Neutoni plane ad vnum idemque redit. Praeterea etiam linea illa ΔΘΖ (vid. fig. 19.) non constituit integram Cissoidem, sed tantum vnum ipsius crus, quod cum altero crure ΖΓ in altero circuli quadrante describendo vnam demum efficit lineam Cissoidem; ita vt haec linea ad vnum solens signum Ζ refracta esset, angulumque ΓΖΔ efficeret, atque sic etiam figuram constitueret, quae vel altera linea Cissoide in opposito semicirculo ΓΕΔ descripta, vel tantum hoc ipso semicirculo aut eius diametro ΓΔ concludi habita est. Idonea de hisce omnibus testimonia suggerunt loca nonnulla Procli pag. 35, vbi in Euclidis definitione de angulo plano deprehendit, quod haec definitio non concedat, ab vna linea angulum constitui, atque pro exemplo Cissoidem laudat, quae, quamuis vna sit linea, angulum tamen efficiat, (*καὶ τοίγε ἡ κισσοειδὴς μία οὖσα ποιεῖ γωνίαν*) addens simul: "totam enim Cissoidem vocamus, non autem „eius particulas (ne aliquis dicat, has coëuntes „angulum facere) cett." (*τὴν γὰρ ὅλην κισσοειδῆ καλοῦμεν, ἀλλ' οὐ τὰ μόρια αὐτῶν, ἵνα (μὴ) λέγῃ τὶς, ὅτι ταῦτα ποιεῖ τὴν γωνίαν συνιόντα*); atque ibidem (pag. 35.) paulo ante (vbi etiam caussa, vnde haec linea nomen duxerit, explica-

 tur)

tur) de angulorum planorum diuisione loquutus, qua vel a lineis simplicibus, vel a mistis, vel ab vtrisque comprehendantur, exemplis illustraturus ita pergit: "Si vero lineae Cissoides ad vnum „coëuntes signum, sicut hederae folia (illinc „enim denominationem habuere) angulum fece„rint, a mistis vtique lineis talis comprehendi„tur angulus." (ὅταν δὲ αἱ κισσοειδεῖς γραμμαὶ συννεύουσαι πρὸς ἓν σημεῖον, ὥσπερ τὰ τοῦ κισσοῦ φύλλα (καὶ γὰρ τὴν ἐπωνυμίαν ἐκεῖθεν ἔσχον) ποιῶσι γωνίαν, ὑπὸ μικτῶν ἡ τοιαύτη δήπου περιέχεται γραμμῶν.

Quae cum ita sint, nulla amplius dubitandi ratio superesse videtur, quin, cuius Cissoidis proprietates in loco illo Procli (pag. 31.) ex Gemino cognoscantur, haec eadem sit, quae Dioclis, ideoque hic noster Geometra Gemino saltem antiquior sit accipiendus.

Primus autem et vnus auctor antiquus, apud quem nostri Dioclis mentio fit, est Eutocius Ascalonita, qui in commentario in Archimedis de sph. et cyl. libros duorum grauissimorum problematum soluendorum exponit Dioclis rationes: quarum quidem prior est problematis nostri ad Archim. de sph. et cyl. lib. II, prop. 2. (pag. 138 sq. edit. Oxon.); altera vero illius, quo sphaera ad

datam

datam rationem intersecanda proponitur, ad lib. II, de sph. et cyl. prop. 5. (pag. 171. edit. Oxon.), vbi quam Archimedes huius problematis solutionem alio loco exhibere pollicitus sit, cum non inueniretur, illam, quam concinnarit Diocles vna cum alia Dionysiodori descriptam adiunxit doctus ille commentator.

Ceterum vtriusque problematis illae Dioclis solutiones ex libro ipsius περὶ Πυρείων inscripto petitae laudantur; qua quidem voce videtur nihil aliud significari, quam quoddam proprium machinarum tormentoriarum genus, quo inprimis sagittae incendiariae (ὀϊστοὶ πύρφοροι) vel lapides rebus ardentibus aut ignem facillime concipientibus instructi (λίθοι πυροβόλοι) emitterentur (vnde tales machinae etiam omnino πυροβόλα, quemadmodum balistae λιθοβόλα, videntur esse appellatae) ad incendendas hostium vrbes, naues, muros, fossas cett. Conff. Vet. Mathemat. edit. Theuenoti, Paris. 1693. pag. 17, 142 et 329.

Harum igitur machinarum doctrina, cum quoad ipsarum constructionem et fabricam fere eadem esset, quae catapultarum balistarumque: eadem forsan, quae ceteris Architectis, etiam nostro Diocli exstitit in isto libro caussa et occasio (ad harum quidem machinarum effectum constituendum)

tuendum) in cubi duplicationem disquirendi. Legitur autem Dioclis solutio huius problematis apud Eutocium fere ita:

* * *

Fig. 18. Ducantur in circulo duae diametri AB, ΓΔ, ad angulos inter se inuicem rectos; et abscindantur ab vtraque parte puncti B aequales duae circuli circumferentiae EB, BZ; et per punctum Z parallela ipsi AB ducatur ZH, et iungatur ΔE. Dico rectas ZH, HΔ duas proportionales medias esse inter ΓH, HΘ.

Ducatur enim per punctum E ipsi AB parallela EK. Est igitur tum EK = ZH, tum KΓ = HΔ. Quod quidem manifestum erit ductis lineis rectis a puncto Λ ad E et Z. Est enim [in triangulis EKΛ, ZHΛ] Ang. ΓΛE = Ang. ZΛΔ [ex prop. 27. lib. III. Eucl. quoniam BE = BZ, ideoque EΓ = ZΔ], et Ang. K = Ang. H = Recto. Quare, cum sit ΛE = ΛZ, omnia etiam omnibus aequalia sunt [ex prop. 26. lib. I. Eucl.; atque quidem KE = HZ, et KΛ = ΛH]; ideoque etiam [cum sit ΛΓ = ΛΔ] reliqua KΓ = reliquae HΔ. Quoniam igitur

ΔK

ΔK : KE = ΔH : HΘ [ex prop. 4. lib. VI, Eucl.]; et ΔK : KE = EK : KΓ [ex prop. 8. lib. VI, Eucl.]; ideo erit ΔK : KE = EK : KΓ = ΔH : HΘ [ex prop. 11. lib. V, Eucl.]. Eſt autem tum KΔ = HΓ [quod quidem elicitur, cum inuentum ſit ſupra KΓ = HΔ, ſi vtrinque addatur HK], tum KE = ZH, tum KΓ = HΔ. Vnde fiet ΓH : HZ = ZH : HΔ = ΔH : HΘ.

Itaque ſi ab vtraque parte puncti B ſumantur circumferentiae aequales MB, BN; et per punctum N ipſi AB parallela ducatur NΞ, iungaturque ΔM; erunt rurſus inter ΓΞ, ΞO mediae proportionales NΞ, ΞΔ.

Si autem hoc pacto ducantur inter puncta B, Δ plures parallelae, eaeque continuae; et ponantur circumferentiis, quae ab his [parallelis] abſcindantur, ad punctum B aequales aliae a puncto B ad Γ circumferentiae; atque ad [quae ita inter puncta B, Γ ſint] conſtituta puncta iungantur a puncto Δ rectae, veluti ΔE, ΔM: ſecabuntur parallelae, quae inter puncta B, Δ interiiciuntur, in quibusdam punctis, cuiusmodi ſunt in appoſita figura O, Θ. Quae puncta ſi admota regula rectis lineis iuncta fuerint,

habebimus descriptam in circulo quandam lineam, in qua sumto quolibet puncto, ductaque per ipsum recta ipsi AB parallela; erunt quae ducta est, et quae per ipsam abscinditur a diametro versus punctum Δ mediae proportionales inter eam, quae item per ipsam abscinditur a diametro versus punctum Γ, eamque ipsius partem, quae puncto in linea sumto et diametro ΓΔ concluditur.

Fig. 19. His ita confectis, sint datae duae rectae A, B, quas inter duas medias proportionales inuenire oporteat. Sit autem circulus, in quo duae diametri ΓΔ, EZ ad rectos angulos se inuicem secent; et describatur in eo, quae per continua puncta, vt supra dictum est, constituitur linea ΔΘZ; et fiat [ex prop. 12. lib. VI, Eucl.] A:B=ΓH:HK; iunctaque ΓK eademque producta lineam ipsam secet in puncto Θ; et per punctum Θ ducatur ipsi EZ parallela ΛM. Itaque ex his, quae supra dicta sunt, inter ΓΛ, ΛΘ mediae proportionales sunt MΛ, ΛΔ. Et quoniam est ΓΛ:ΛΘ=ΓH:HK [ex prop. 4. lib. VI, Eucl.]; et ΓH:HK=A:B; [ideoque etiam ΓΛ:ΛΘ=A:B] si mediae inter

A, B

A, B interiiciantur N, Ξ pro eadem illa ratione, quam inuicem habent ΓΛ, ΛΜ, ΛΔ, ΛΘ [i. e. si constituatur ex prop. 12. lib. VI, Eucl. ΓΛ : ΛΜ = Α : Ν, et ΜΛ : ΛΔ = Ν : Ξ, ideoque ΔΛ : ΛΘ = Ξ : Β]; sumtae vtique fuerint inter A, B mediae proportionales N, Ξ. Quod facere oportebat.

CAP. XX.

PAPPVS.

Tertius liber *collectionum mathematicarum*, (συναγωγῶν μαθηματικῶν; quo quidem opere colligendis multis celebriorum Mathematicorum inventis nimis dispersis nec satis notis, atque illustrandis vel supplendis singulis ipsorum scriptorum locis idoneam atque illis temporibus, quibus vixit, sane insolitam Geometriae cognitionem, necnon saepius insigne ingenii acumen et sollertiam ostendisse, atque sic de vniuersa Mathesi, inprimis autem de eius historia antiqua optime meruisse habendus est *Pappus*, qui exeunte seculo quarto Theodosio Magno imperante inclaruit, vt testatur Suidas in voce Πάππος, pag. 424, tom. 2. edit. Colon. Allobrog. 1619; necnon in voce Θέων, pag. 1307, tom. 1.) quemadmodum omnino de mediarum proportionalium doctrina disquisitiones continet multas et varias, exhibet etiam vberiorem problematis de cubi duplicatione, siue de inueniendis duabus mediis continue proportionalibus tractationem, quae quidem statim huius libri

prae-

praefationem excipit. Postea quam autem in hac praefatione quaedam praemisit Pappus, quae in proponendo theoremate vel problemate (quorum differentiam explicat contra Geometras antiquos, quorum alii problemata omnia, alii theoremata esse dixerint; conf. Proclus in I. Eucl. pag. 22) Geometrae omnino essent obseruanda: a quibusdam eorum, qui mathematicas scientias profiterentur, nonnullas adfirmat propositiones, de quibus et similibus ipse in hoc coll. math. libro demonstrationes adferre deberet, imperite esse determinatas; atque igitur primum huius libri problema (quod est problema nostrum) aliquem, qui magnus Geometra videretur, dum illud per planorum contemplationem soluere se dixisset, inscite determinasse. Huius igitur auctoris *anonymi* constructionem, quamuis satis inconcinnam et prorsus vanam, nè quid tamen ad pleniorem huius problematis historiam a nobis praetermissum videatur, hic subiicere non pigebit.

* * *

Sint duae rectae lineae AB, AC ad rectos inter se angulos: et a puncto B ducatur BD ipsi AC parallela: ponaturque AB = BD, et iungatur DC, quae ipsi BA in E occurrat. Fig. 20.

A

A puncto E autem ducatur EH parallela ipsi AC; producaturque BD; et a puncto D ducatur DG parallela ipse BE, et ponatur $BD = DN = NL = LX = XK$. Deinde per puncta N, L, X, K ducantur NO, LM, XP, KH ipsi BE parallelae; et ponatur $KR = BA$, seceturque bifariam in puncto S; et fiat $KH : HS = SH : HT$; atque $SH : HT = TH : H\Phi$; et a recta linea XP auferatur $QX = AB$, iunganturque QK, $Q\Phi$; atque a puncto S ipsi $Q\Phi$ parallela ducatur $S\Psi$. A puncto Ψ autem ducatur $\Psi\Omega$ parallela ipsi KX, et sit $LM : M\Omega = \Omega M : M\alpha$, atque $\Omega M : M\alpha = \alpha M : M\beta$; et ab ipsa ON auferatur $N\gamma = AB$; iunganturque γL, $\gamma\beta$. Deinde a puncto Ω ipsi $\beta\gamma$ parallela ducatur $\Omega\delta$, et a δ ipsi LN parallela $\delta\epsilon$, atque sit $DG : G\epsilon = \epsilon G : G\zeta$; et $\epsilon G : G\zeta = \zeta G : G\vartheta$, iungaturque ϑC, et ipsi ϑC parallelae ducantur $\zeta\varkappa$, $\epsilon\lambda$. Postremo ducantur a punctis $\varkappa$, λ ipsis AC, BD parallelae $\varkappa\mu$, $\lambda\nu$. Ostendendum est ipsarum AC, BD medias proportionales esse $\mu\varkappa$, $\nu\lambda$.

Haec

Haec igitur ab illo viro fuere conscripta, sed sine demonstratione, quam quidem postea exhibere promisit, Pappoque nostro tradita; qui, vt interim de proposita constructione responderet, iudicisque partes susciperet, et ab ipso auctore et ab Hieronymo Philosopho eiusque amicis rogatus ipsam accuratiori et prolixiori examine expendendam aggreditur.

Ostendit autem primum, illum non recte sed perperam constructione visum esse. Bifariam enim secta linea recta RK in S, vbi constitueretur KH : HS = SH : HT = TH : HΦ, punctum sectionis in tertia proportione, velut Φ non inveniri posse, nisi prius (quod neglexerit) posita fuerit ratio KH : HR h. e. BE : EA. Quae autem si posita concederetur, datum esse punctum Φ, quod tamen vel inter HR vel inter RT manifesto cadere deberet. Hoc igitur numeris adhibitis ita elidit, vt omnis proportio ipsius BE : EA vel ipsius KH : HR, quae sit quadrupla vel minor, efficiat hoc sectionis punctum Φ inter RH; quae vero sit quintupla, vel maior efficiat sectionis punctum inter RT; ideoque sectionis punctum in R cadere non adsumi possit: quod et ille vir dicere non ausus sit, qui alias ipse per sese redargueretur sumens quaesitum vt concessum.

Demon-

Demonstrat hoc adhuc paulo fusius, recta linea nimirum existente HK et puncto in ipso R, inter RK duo puncta veluti T, S non sumi posse per contemplationem eam, quae in plano fiat, ita vt sit KH : HS = SH : HT = TH : HR, sed hoc problema potius solidum esse. Quod igitur quamuis perspexerit vir ille, ideoque sumserit sectionis punctum inter HR ad Φ, eum tamen nihilominus in reliqua constructione in eandem hanc difficultatem imprudenter delapsum esse, quod quidem in sequentibus confirmat Pappus, in vberiorem simul et magis idoneam huius constructionis expositionem et castigationem digressus. Quoniam igitur, inquit, data est proportio KH : HR, atque est data KH (hoc enim ponere oportet) data erit et HR et reliqua RK; vnde et SR, quae dimidia est ipsius RK. Erat autem et RH data: erit igitur et tota HS data. Quare et data proportio KH : HS; atque est [ex prop. 11. lib. VI. Eucl.] KH : HS = SH : HT. Et data est SH, vt ostensum fuit. Ergo et HT erit data. Eadem ratione data erit et HΦ; quare et data differentia rectarum linearum HR, HΦ: et inuentum est Φ inter HR, sicut et per numeros demonstratum iam fuit. Et quoniam data est differentia ΦR, et recta linea coniungens RQ, quae est aequalis ipsi XK, datum erit specie et magnitudine

dine triangulum rectangulum ΦQR. Datus est igitur angulus $R\Phi Q$, qui est aequalis angulo exteriori $KS\Psi$ [ex prop. 29. lib. I. Eucl.]. Ergo et producta $\Omega\Psi$ ad F, datum erit $SF\Psi$ triangulum rectangulum et specie et magnitudine. Quoniam enim data est vtraque ipsarum RK, RQ; data erit et QK; et proportio $QK : K\Psi$ est data; quod eadem sit datae proportioni $\Phi K : KS$. Quare et data ΨK. Sed et ΨS est data, siquidem et $\Phi K : KS = \Phi Q : \Psi S$. Et ostensa est data ΦQ. Data igitur et ΨS. Erat autem et angulus ΨSK datus. Ergo et triangulum rectangulum ΨSF specie et magnitudine dabitur. Quare et ΨF parallela ipsi XK et in directum ipsi $\Psi\Omega$. Data igitur et $\Omega L = FK$. Et quoniam est $HK = ML$; ΩL autem $< SK$, est enim $\Omega L = FK$; atque est $KH : HS = SH : HT = TH : H\Phi$; at $LM : M\Omega = \Omega M : M\alpha = \alpha M : M\beta$; erit $M\beta > H\Phi$, etenim et hoc deinceps demonstrabitur. [Vid. infra prop. 2. huius libri III. coll. math.] Ergo et reliqua $\beta L < \Phi K$. Rursus quoniam data est ΩL, cum ostensa sit aequalis ipsi FK datae; data autem et $LM = HK$; erit proportio $LM : M\Omega$ data. Atque est $LM : M\Omega = \Omega M : M\alpha$; et data est ΩM, ergo et $M\alpha$ dabitur. Eadem ratione dabitur quoque $M\beta$; quare et punctum β est datum; quod

quod positum sit, vbi vult, vel inter VM, vt nunc est, vel inter $V\alpha$, nempe posita recta $VL = KR = AB = QX = \gamma N$. Si enim dicit β cadere in V, quaesitum nihilominus vt concessum sumit. Apparet namque rursus in recta linea ML positione data, et puncto aliquo in ipsa dato V, sumere inter LV duo puncta Ω, α, et facere $LM : M\Omega : \Omega M : M\alpha = \alpha M : MV$; quod nullus ipsorum concedit.

Quibus adhuc antiquorum Geometrarum auctoritate confirmatis, simili denique ratione etiam constituit $DG : G\varepsilon = \varepsilon G : G\zeta = \zeta G : G\vartheta$; vbi punctum ϑ (posita $D\tau = VL = RK = AB$) vel inter $G\tau$, vel inter $\tau\zeta$ caderet, ideoque angulus CDG esset vel obtusus vel acutus, atque sic rectae $C\vartheta$, $\varkappa\zeta$, $\lambda\varepsilon$ ipsi GE non fierent parallelae, quippe non ad angulos rectos constitutae, secundum quos duntaxat problema efficeretur.

* * *

Quae cum ita ad refellendam illam Geometrae anonymi constructionem satis prolixe sint exposita, posteaquam adhuc nonnulla theoremata, quae supra posuerat, demonstrauit, ad ipsum problema nostrum atque antiquorum Geometrarum de ipso soluendo sententias se conuertit;

Decla-

Declarato autem illo problematum geometricorum discrimine, quo in plana, solida et linearia dispescuntur, antiquos tradit Geometras nostrum problema solidum esse asserentes, eorum quidem alios ipsum instrumentis in operationem manualem et commodam aptamque constructionem traduxisse; alios vero per coni sectiones vel per lineam conchoidem: neminem autem per ea, quae proprie plana appellarentur. Quae vt melius intelligantur, trium Geometrarum antiquorum, Eratosthenis, Nicomedis et Heronis huius problematis soluendi rationes descriptas exhibet, quibus adhuc aliquam ab ipso inuentam adiungit. Legitur autem haec Pappi solutio repetita in harum collectionum math. lib. VIII. prop. 11. (p. 463 sq.); nec omissa est ab Eutocio ad Archimed. de sph. et cyl. lib. II. prop. 2. (pag. 159 sq. edit. Oxon.), qui vero ipsam, cum Pappi citet εἰσαγωγὰς μηχανικὰς, ex hoc VIII. coll. math. libro, qui μηχανικῶν fuit inscriptus, petiisse videtur. Ceterum cum Eutocius in describenda hac *Pappi* solutione quam maxime diligens et fidus fuisse perspiciatur, ita vt prorsus nihil mutarit: in ipsa exponenda hunc Eutocium graece editum sequi maluimus, quam mendosam Pappi versionem latinam.

* * *

Fig. 21. Describatur semicirculus $AB\Gamma$, et a centro Δ ad rectos angulos ducatur ΔB; et moueatur regula circa punctum A, ita vt vnus quidem eius terminus clauo cuidam ligneo ad punctum A infixus sit, reliqua vero pars circa hunc clauum tanquam centrum inter puncta B et Γ circumagatur. His hoc modo constructis, propositum sit duos cubos inuenire, qui datam inter se inuicem rationem habeant. Fiat ratio, quam habet $B\Delta$ ad ΔE, eadem, quae data; et iuncta ΓE producatur ad punctum Z. Moueatur autem regula inter puncta B, Γ, vsque eo, donec pars eius interiecta inter rectas ZE, EB aequalis sit parti illi, quae inter rectam BE, et circumferentiam $BK\Gamma$ interiicitur. Hoc enim tentando transferendoque regulam facile assequemur. Itaque factum sit, et regula eo, quo AK, situ iaceat, ita vt sit $H\Theta = \Theta K$. Dico cubum constructum ex recta $B\Delta$ ad cubum ex recta $\Delta\Theta$ datam habere proportionem, hoc est eandem, quam $B\Delta$ ad ΔE.

Intelligatur enim circulus completus esse: iunctaque $K\Delta$, eademque ad punctum Λ producta, iungatur ΛH. Parallela est igitur $B\Delta$ ipsi ΛH, eo quod et $K\Theta = H\Theta$, et

$K\Delta =$

KΔ = ΔΛ. [in triangulo quidem HKΛ, ex prop. 2. lib. VI. Eucl.] Iungantur ΑΛ et ΛΓ. Quoniam igitur angulus rectus est ΑΛΓ, vtpote qui semicirculo insistit, [ex prop. 31. lib. III. Eucl.] et normalis ΛM [cum sit parallela ipsi BΔ normali]; erit Quadr. ΛM: Quadr. MA; hoc est [ex cor. 2. prop. 20. lib. VI. Eucl.] ΓM : MA = Quadr. ΛM: Quadr. MH. Etenim est [cum angulus ΑΛH semicirculo insistens sit rectus, et ΛM normalis, ex cor. prop. 8. lib. VI. Euclid.] ΛM : MA = ΛM : MH; ergo etiam [ex prop. 22. lib. VI. Eucl.] Quadr. ΛM: Quadr. MA = Quadr. ΛM : Quadr. MH; ideoque [ex prop. 11. lib. V. Eucl.] Quadr. ΛM: Quadr. MH = ΓM : MA. Communis addatur ΛM : MH. Erit igitur ΓM : MA + ΛM : MH; hoc est [ex def. 5. lib. VI. Eucl.] ΓM : MH = Quadr. ΛM : Quadr. MH + ΛM : MH. Sed Quadr. ΛM : Quadr. MH + ΛM : MH = Cub. ΛM : Cub. MH *). Ergo

*) Cubi enim omnes (quemadmodum omnino prismata et pyramides) sunt inter se in proportione composita ex proportione tum basium tum altitudinum. Conf. Kaestneri V. S. Elementa Geometriae, prop. 820 cor. 8. Huius theorematis demonstrationem in

 ele-

Ergo etiam $\Gamma M : MH = $ Cub. AM : Cub. MH [ex prop. 11. lib. V. Eucl.] Sed [ex prop. 4. lib. VI. Eucl.] $\Gamma M : MH = \Gamma\Delta : \Delta E$, et $AM : MH = A\Delta : \Delta\Theta$. Igitur etiam [cum ſit $B\Delta = A\Delta = \Gamma\Delta$] $B\Delta : \Delta E = $ Cub. $B\Delta$: Cub. $\Delta\Theta$. Eſt autem $B\Delta : \Delta E$ ratio data. Cum igitur inter rectas $B\Delta$, ΔE duae proportionales mediae inueniendae ſint, rectarum ſecunda eſt $\Delta\Theta$ [ex cor. prop. 33. lib. XI. Eucl.]. Quodſi [ex prop. 11. lib. VI. Eucl.] fiat $B\Delta : \Delta\Theta = \Theta\Delta$: aliam quandam, haec erit tertia.

* * *

Cete-

elementis Euclidis non inuenimus, quamuis ea facillime elici poſſit ex iis, quae in duodecimo libro traduntur. Monet Commandinus in nota ad hunc Pappi locum, ſe hoc theorema demonſtraſſe in libro de centro grauitatis ſolidorum, prop. XXI. Legitur haec Commandini demonſtratio etiam in ipſius commentario ad librum Archimedis de conoid. et ſphaeroid. prop. XI, vbi Archimedes hoc theorema tanquam iam ab antiquioribus Geometris demonſtratum praemiſit. Vid. Archimedis opera nonnulla a Fed. Commandino nuper in latinum conuerſa et commentariis illuſtrata, Venet. 1558. commentariorum fol. 35.

Ceterum monet adhuc Eutocius, hanc constructionem eandem esse atque illam Dioclis, et hoc vno eas inter se differre, quod ibi quidem Diocles, descripta linea quadam inter A et B per continua puncta, sumat in ea punctum H producta ΓE eademque lineam praedictam secante; hic vero Pappus id punctum exhibeat circumacta circa punctum A regula AK. Quod enim (pergit) punctum H idem sit, vtcunque sumatur, siue vt Diocles praecipit, siue vt Pappus regulae ope, ita facile colligitur. Producta MH ad punctum N, iungatur KN. Quoniam igitur est KΘ = ΘH, et HN ipsi ΘB parallela; ideo etiam est KΞ = ΞN [ex prop. 2. lib. VI. Eucl.]. Communis est autem ΞB, eademque ad rectos angulos: nam KN ab ea, quae per centrum ducitur, in duas aequas partes et ad rectos angulos secatur [vid. prop. 3. lib. III. Eucl.] Aequalis est etiam basi basis [in triangulis quidem ΞBK, ΞBN, ex prop. 4. lib. I. Eucl.], et propterea circumferentiae BN circumferentia KB [ex prop. 24. lib. III. Eucl.]. Punctum igitur H idem est, quod in linea Dioclis: quin etiam demonstratio eadem fuerit. Dicebat enim Diocles esse ΓM : MN = NM : MA = AM : MH. Est autem MN = MΛ; diameter enim eam ad rectos angulos secat [ex prop. 3. lib. III. Eucl.]. Quare ΓM : MΓ = ΓM : MA = AM : MH. Pro-

portionales igitur mediae inter ΓM, MH sunt ΓM, MΛ. Sed [ex prop. 4. lib. VI. Eucl.] est et ΓM : MH = ΓΔ : ΔE; et ΓM : MΛ = ΛM : MH, [cum in triangulis ΛMΓ, ΛMH anguli ad punctum M sint recti, anguli vero MΓΛ, MΛH aequales, quippe aequalibus circumferentiis ΓK, ΛΛ insistentes, ex prop. 27. lib. III. Eucl.] hoc est ΓΔ : ΔΘ [cum sit ΓΔ = ΛΔ]. Cum igitur inter rectas ΓΔ, ΔE duae mediae inueniendae sint, rectarum secunda est ΔΘ; quam quidem et Pappus exhibuit.

Cap. XXI.

CAP. XXI.

S P O R V S.

Ingenioſam illam et ſollertem Dioclis et Pappi duarum mediarum continue proportionalium inter duas datas conſtructionem adumbrando ſequutus eſt SPORVS, ſiue vt in aliis Eutocii codd. ſcribitur PORVS NICAENVS, qui adhuc ſolus nobis reſtat ex antiquis Geometris, quorum de illo problemate diſquiſitiones recenſet Eutocius. Videtur autem paulo ſeriori aetate, quam Pappus, vixiſſe; citaturque ab Eutocio ſub finem commentarii in Archimedem de circuli dimenſione (pag. 216. edit. Oxon.) ipſius κηρίων liber, in quo reprehendiſſe dicitur Archimedem, quod non accurate inuenerit, cui rectae lineae circuli circumferentia eſſet aequalis; laudans ſimul praeceptorem ſuum, Philonem Gadarenſem, rem ad accuratiores numeros perduxiſſe, quam ii eſſent, quos Archimedes propoſuerit.

Ceterum antiqua de *Sporo* teſtimonia exſtant adhuc apud Scholiaſten Arati et Leontium de ſphaera Arati ad verſ. 541 et 1091, (vid. Arati editio no-

 viſſima

vissima cur. Ioan. Theoph. Buhle, V. Cel. Lipſ. 1793, pag. 125, 244 et 258.) vbi commentator (ὑπομνηματιστὴς) Arati appellatur.

Ratio autem eius inueniendarum duarum mediarum continue proportionalium apud Eutocium (pag. 141. edit. Oxon.) ita explicatur.

* * *

Fig. 22. Sint datae duae rectae inaequales AB, BΓ. Oportet autem inter AB, BΓ duas proportionales medias proportione continua inuenire. Ducatur a puncto B ipſi AB ad angulos rectos ΔBE; et deſcribatur centro quidem B, interuallo vero BA ſemicirculus ΔAE. Deinde recta a puncto E ad Γ iuncta producatur ad punctum Z; et a puncto Δ ducatur recta quaedam eiusmodi, vt ſit HΘ = ΘK. Hoc enim fieri poteſt. Ducantur denique a punctis H, K ad ΔE normales HΛ, KNM.

Quoniam igitur eſt KΘ : ΘH = MB : BΛ [in triangulo quidem KΔM, ex. prop. 2. lib. VI. Euclid.], et KΘ = ΘH; ideo etiam MB = BΛ, et reliqua ME = reliquae ΛΔ. Igitur etiam tota ΔM = toti ΛE; et propterea MΔ : ΔΛ = ΛE : EM. Sed [ex prop. 4. lib. VI. Eucl.

Eucl.] $M\Delta : \Delta\Lambda = KM : H\Lambda$; et $\Lambda E : EM = H\Lambda : NM$. Rursus quoniam [ex cor. prop. 8. lib. VI. Eucl.] $\Delta M : MK = KM : ME$; ideo [ex cor. 2. prop. 20. lib. VI, Eucl.] $\Delta M : ME$ = Quadr. ΔM: Quadr. MK, hoc est [ex prop. 4 et 22. lib. VI, Eucl.] Quadr. ΔB, siue Quadr. AB: Quadr. $B\Theta$; est enim $\Delta B = BA$. Rursus quoniam $M\Delta : \Delta B = \Lambda E : EB$, et $M\Delta : \Delta B = KM : \Theta B$, et $\Lambda E : EB = H\Lambda : \Gamma B$; ideo etiam [ex prop. 11. lib. V, Eucl.] $KM : \Theta B = H\Lambda : \Gamma B$, et permutando $KM : H\Lambda = \Theta B : \Gamma B$. Sed [ex prop. 4. lib. VI, Eucl.] $KM : H\Lambda = M\Delta : \Delta\Lambda$, hoc est, $\Delta M : ME$, hoc est Quadr. AB: Quadr. $B\Theta$. Igitur etiam [ex prop. 11. lib. V, Euclid.] Quadr. AB: Quadr. $\Theta B = B\Theta : B\Gamma$. Sumatur [ex prop. 13. lib. VI, Euclid.] inter ΘB, $B\Gamma$ media proportionalis Ξ. Quoniam igitur Quadr. AB: Quadr. $B\Theta = B\Theta : B\Gamma$; et quidem Quadr. AB: Quadr. $B\Theta = (AB : B\Theta)^2$ [vid. cor. 1. prop. 20. lib. VI, Eucl.]; at $B\Theta : B\Gamma = (B\Theta : \Xi)^2$ [ex def. 10. lib. V, Eucl.]: ideo etiam [ex prop. 11. lib. V, Eucl.] $AB : B\Theta = B\Theta : \Xi$. Sed $\Theta B : \Xi = \Xi : B\Gamma$. Itaque etiam $AB : B\Theta = \Theta B : \Xi = \Xi : B\Gamma$. Illud autem manifestum est, constructionem hanc eandem esse atque illam: quam Diocles et Pappus tradidere.

Cap. XXII.

RECENTIORVM ENARRANTVR IN NOSTRVM PROBLEMA CONATVS.

Exposita igitur hactenus a nobis sunt, quae ex idoneis antiquitatis fontibus et monumentis petita, ad paulo accuratiorem vberioremque problematis de cubi duplicatione, siue de inueniendis duabus mediis continue proportionalibus historiam pertinere visa sunt; neque, quod saltem attinet ad ea, quae huius problematis soluendi edita adhuc leguntur varia antiquorum Geometrarum conamina, quidquam ex his a nobis praetermissum esse opinamur. Occurrunt quidem apud nonnullos recentiores de Mathesi eiusque historia scriptores in censum antiquorum nostri problematis perficiendi auctorum adhuc relati Joannes Philoponvs et Dionysiodorvs. Conff. Wolffii elementa Matheseos vniuersae, tom. I, Geneuae, 1743, pag. 409; Dictionaire universel de Mathematique et Physique, par Monf. Saverien, Paris. 1753, tom. I, pag. 252; atque Philander in not. ad Vitruv. de Architect. lib. IX, cap. 3, edit. Joa. de

de Laet, Amst. 1649, pag. 178. Sed de illo Aristotelis commentatore iam supra (cap. XVI.) vidimus, esse in ipsius commentario ad Aristot. Analyt. post. lib. I, cap. 7, miram lectionis varietatem; atque quidem in altero codice, qui exscriptus est in editione Aldina 1534, (vid. fol. 24) exponi ab ipso Philonis Byzantini solutionem, adscribi autem Apollonio Pergaeo; in altero vero codice, cuius lectiones variantes huic editioni Aldinae ad calcem adiectae leguntur, (vid. fol. 117) exhiberi quidem, praeter illam Heronis Apollonio Pergaeo vindicatam, eandem illam Philonis Byzantini, sed neque hunc Philonem, neque Apollonium, neque alium quemquam tanquam eius auctorem nominari: vnde forsan euenit, vt, qui hoc codice vterentur, eam ab ipso Philopono esse excogitatam statuerent. Quod vero ad hunc Dionysiodorum, Geometram Theodosii M. temporibus clarum, attinet, cum Georgius Valla Placentinus, qui expetendorum et fugiendorum libris XXXXI, Venet. ap. Aldum 1507, 2 voll. editis etiam de disciplinis mathematicis bene meruit, in huius operis libro XIII; (Geometriae libro IV), cap. 2; de duobus cubis ad vnum redactis expositurus, duodecim illas huius problematis ex Eutocio descripsisset solutiones, et praeter has adhuc illas, quas tradit Philoponus, cuius posteriore

riote codice vſus eſt; cumque huic problematis noſtri ſolutionum farragini alius adhuc problematis adfinis, quo quidem data ſphaera plano ſecanda proponitur, ita vt ipſius ſegmenta ad ſe inuicem rationem habeant datam, ſolutiones a Dionyſiodoro et Diocle prolatas ex Eutocio ad Archimed. de ſph. et cyl. lib. II, prop. 5, (pag. 171 ſqq. edit. Oxon.) adiungendas duxiſſet: factum eſt, vt miro ſane errore etiam ille Dionyſiodorus antiquis noſtri problematis ſoluendi auctoribus adnumeraretur.

Ceterum antiquorum Geometrarum adhuc plures in indagandis noſtri problematis difficultatibus fuiſſe occupatos, variasque ipſius ſoluendi edidiſſe rationes, temporum iniuria deperditas, ſatis veroſimile eſt, confirmaturque (vt praetermittamus irritos illos et infelices conatus, quales ſine dubio ſaepius proferri vidit etiam antiquitas; maxime in primis huius problematis originibus, cum ſublimior illa Geometria nondum eſſet exculta, ideoque de ſingulari huius problematis natura et indole rectiora adhuc non conſtarent; vel etiam poſtea a viris Geometriam non bene eductis, cum ea, quae ab aliis ad huius quaeſtionis inueſtigationem non infeliciter eſſent propoſita, prorſus negligerentur: quod quidem in ineptum

tum illum nostri problematis soluendi auctorem a Pappo in praefat. lib. III, collect. math. castigatum inprimis cadere supra (cap. XX,) vidimus) ex laudatissimo illo Pappi loco pag. 7, vbi nonnullos hoc problema per locos solidos Aristaei perfecisse memoratur.

Sed vt denique sub finem huius libri ad RECENTIORA etiam conuertamur TEMPORA, quae in his ad nostri problematis inuestigationem adhuc prolata esse cognouerimus, breuiter recensituri; renatis quidem ex illa fere communi mediae (vt dicitur) aetatis barbarie in Occidente litteris, cum, vt ceterarum disciplinarum, ita etiam Mathematum studium euoluendis et retractandis veterum scriptis maiorem in modum reflorescerct et alcretur: non fieri potuit, quin plures in hanc, quae apud veteres Mathematicos inter grauissimas habita esset, de cubo duplicando siue de inueniendis duabus mediis continue proportionalibus quaestionem inciderent, seque in excogitandis nouis ipsius solutionibus denuo exercerent. Commemorandi sunt ex his inprimis, qui ineunte seculo decimo quinto floruit NICOLAVS DE CVSA Cardinalis, et de mathematicis complementis scripsit; in quibus cum inprimis in circuli quadraturam conatus suos protulisset, a Joanne Regio-

montano

montano et Joanne Buteone postea confutatos, de transformatione figurarum, atque de mensura recti et curui omnino egit, nechon quaedam etiam de nostro problemate perficiendo tentauit, Platonis rationem maxime sequutus (vid. operum clariss. P. Nicolai Cusae Card. Paris. ap. Ascensium, 1514, tribus voluminibus euulgatorum, vol. II, in libello de transmutationibus geometricis, fol. 42); et qui paulo post inclaruit ille de sectionum conicarum doctrina auctor demerentissimus, JOANNES VERNERUS, Norimbergensis, qui in commentario s. paraphrastica enarratione in vndecim modos conficiendi eius problematis, quod cubi duplicatio dicitur (ad calcem Libelli super viginti duobus elementis conicis, Norimbergae, 1522), posteaquam omnes veterum Geometrarum rationes recensuit dilucidiusque exposuit, etiam aliquam solutionem mechanicam ipse est auspicatus.

Seculo decimo sexto ORONTIVS FINAEVS DELPHINAS libro singulari nonnulla difficiliorum problematum geometricorum soluisse professus est, (vid. Orontii Finaei Delphinatis, Regii Mathematicarum Lutetiae Professoris, Quadratura circuli tandem inuenta et clarissime demonstrata. De circuli mensura et ratione circumferentiae ad diametrum, Demonstrationes duae. De multangula-

rum

rum omnium et regularium figurarum descriptione, Liber hactenus desideratus. De inuenienda longitudinis locorum differentia, aliter quam per Lunares eclipses, etiam dato quouis tempore, Liber admodum singularis. Planisphaerium geographicum, quo tum longitudinis, tum latitudinis differentiae, tum directae locorum deprehenduntur elongationes, Lut. Paris. 1544.) atque ibi statim in limine libri de circuli quadratura, prima propositione, datis duorum quadratorum lateribus, quorum alterum circa, alterum vero intra circulum describitur: binas medias lineas rectas sub eadem ratione continue proportionales inueniendas tradit; quod quidem problema (quippe cum harum mediarum rectarum inueniendarum minorem circumferentiae circuli, circa et intra quem quadrata illa sint descripta, aequalem constituere conetur) ad construendam et confirmandam circuli quadraturam necesse esse dicit; deinde pag. 24 etiam ipsam cubi duplicationem inde eliciendam docet. Hunc librum excepit anno 1556 prolixior tractatus eiusdem Orontii de rebus mathematicis hactenus desideratis, Parisiis editus, qui etiam fere penitus repletus est vberioribus de mediarum continue proportionalium inuentione disquisitionibus.

Nactus

Nactus est autem mox idoneos aduersarios, qui ingentia eius sophismata acutissime detexerunt, seuereque vindicarunt, *Petrum Nonium* et *Ioannem Buteonem;* quorum quidem alter singulari libello de erratis Orontii Finaei (vid. Petri Nonii Salaciensis opera, Basil. 1592; vbi ad calcem: De erratis Orontii Finaei, qui putauit inter duas datas lineas, binas medias proportionales sub continua proportione inuenisse, circulum quadrasse, cubum duplicasse, multangulum quodcunque rectilineum in circulo describendi artem tradidisse, et longitudinis locorum differentias aliter quam per eclipses lunares, etiam dato quouis tempore manifestas fecisse, Petri Nonii Salaciensis Liber vnus) euidenti et necessaria ratione ostendit, eas duas rectas lineas, quas Orontius medias proportionales constituerit, veras non esse, sed alteram superare iustam magnitudinem, alteram non implere; alter vero, ipsius Orontii discipulus, confutationem quadraturae circuli ab Orontio Finaeo factae operibus suis geometricis inseruit, (vid. Joa. Buteonis Opera Geometrica, quorum tituli sequuntur. De arca Noe, cuius formae capacitatisque fuerit. De sublicio ponte Caesaris. Confutatio quadraturae circuli ab Orontio Finaeo factae. Ad locum Quintiliani geometricum explanatio. Ad problema cubi duplicandi.

De

De fluentis aquae menſura. Emendatio figurationis organi a Columella deſcripti. De libra et ſtatera. De precio margaritarum. Lugduni, 1554, pag. 42 ſqq. et 59 ſqq.) vbi etiam errores STIFELII in cubo duplicando aperuit, qui in Arithmetica integra (vid. Arithmetica integra, authore Michaele Stifelio, Norib. ap. Joh. Petreium, 1544; vbi fol. 119 de duplatione cubi) etiam hoc problema ſoluere aggreſſus erat. Ipſe quoque BVTEO ibidem peculiarem aliquam cubi duplicandi rationem admodum ingenioſam propoſuit, atque quidem per approximationes, ſola ope Geometriae elementaris, quam explicat *Kaeſtnerus* V. S. in libro (*Geſchichte der Künſte und Wiſſenſchaften ſeit Wiederherſtellung derſelben* u. ſ. w. *7te Abtheil. Geſchichte der Mathematik* u. ſ. w. *S.* 470. u. f.)

Infelicibus illis cubi duplicandi auctoribus adhuc adnumerandi ſunt, qui hoc et ineunte ſeculo ſequente vixerunt, BERNARDVS SALIGNACVS, (vid. Bern. Salignaci Meſolabium, Geneuae, 1574 editum) JOSEPHVS JVSTVS SCALIGERVS, (vid. Joſ. Scaligeri Jul. Caeſ. filii Meſolabium, ad nobiles Acad. Lugdunenſ. Batauor. curatores, et magnificos eiusdem ciuitatis conſules. Lugd. Bat. 1594.) JOANNES ALFONSVS DE MOLINA, (vid. Deſcubrimientos Geometricos de Joan. Al-

fonſo de Molina. En Anveres, 1598. Qui liber latine verſus prodiit Arnhemii, 1620: Noua reperta Geometrica Joh. Alfonſi Molinenſis Cani. In quibus ſubtiliores geometricae quaeſtiones, de duplicatione cubi, quadratura circuli, rectitudine angulorum, aequalitate linearum curuarum cum recta diſcutiuntur: Demonſtr. firmiſſimis deducuntur, Euclidea Elementa nonnulla corriguntur, nonnulla vt falſa reiiciuntur. Hiſpanice edita, iam vero latinitate donata a Nicolao Jonſonio Arnh. Geldro.) ADRIANVS METIVS, (vid. Arithmeticae et Geometriae Practica Adriani Metii, Alcmar. Matheſeos Profeſſ. in Acad. Friſiae Franequerana ordin. Franequerae, 1611, pag. 24.) aliique plures, quorum omnium rationes, ſi eas per numeros examinare non grauatus fueris, vt penitus falſae et ſatis inſulſae protinus deprehendentur.

Qui de perficienda atque praeſtantiſſimis inventis amplificanda Matheſi inter omnes horum temporum Geometras optime meruit, inprimisque transferenda primum Arithmetice ad Geometriae quaeſtiones ad noſtri problematis naturam inueſtigandam viam quaſi praemuniuit, acutiſſimus ille VIETA; hic cum in noſtri problematis diſquiſitionem quoque eſſet delatus, aliquas tamen mechanicas

nicas eius ſoluendi rationes proponere maluit. Vid. Franciſci Vietae opera mathematica, edita ſtudio Franciſci a Schooten, Lugd. Bat. 1646, Suppl. Geometriae prop. 5, pag. 242 ſq. necnon variorum de rebus mathematicis reſponſor. lib. VIII, cap. 5. pag. 353 ſqq. Cui adhuc adiungendi ſunt, qui hoc aeuo etiam mechanicis ſolutionibus concinnandis operam dederunt, Joannes Baptista Villalpandvs, qui in operis ſui explanationum in Ezechielem tomo tertio (Vid. Hieronymi Pradi et Joannis Baptiſtae Villalpandi e Soc. Jeſu in Ezechielem Explanationes et Apparatus vrbis ac templi Hieroſolymitani commentariis et imaginibus illuſtratus. Romae, Superiorum permiſſu, 1606.) (pag. 289 ſqq.) ſingulares quasdam lineas curuas ab ipſo inuentas, quas proportionatrices appellauit, ad inueniendas medias continue proportionales adhibuit, atque (pag. 247 ſqq.) earundem ope etiam augendorum minuendorumue data ratione corporum inſtrumentum conſtituit *); Clavdivs Richardvs, (vid. Eucli-

*) Iſtas omnes de noſtro problemate diſquiſitiones (vt omnino Geometrica omnia circa pondera et centrum grauitatis, quae in ſuis de templo Salomonico commentariis congeſſerit Villalpandus) attribuendas eſſe potius *Chriſtophoro Gruenbergerio*, monuit

Euclidis elementorum geometricorum libros tredecim, Isidorum et Hypsiclem etc. illustrauit Claudius Richardus, Antverpiae, 1645; cui adiectus est pag. 545 sqq. Liber de inuentione duarum rectarum linearum continue proportionalium inter duas rectas datas, ex antiquis Geometris et recentioribus, vbi pag. 562 sq. modus decimus quartus est ipsius Claudii Richardi) et qui de nostri problematis historia etiam nonnulla exposuit JOHANNES MOLTHERVS (vid. Problema Deliacum de cubi duplicatione nunc tandem post infinitos praestantissimorum Mathematicorum conatus expedite et Geometrice solutum, auctore Joh. Molthero, Francof. 1619.).

Recentiori demum Analysi a Cartesio primum perfectae in acceptis referendum esse, quod veram et propriam nostri problematis naturam penitus iam perspiciamus, atque quidem ipsum ita esse comparatum, vt ad ipsius solutionem sola Geometria plana non sufficiat, sed lineae curuae circulo altiores necessario requirantur, firmissima demonstratione euincere possimus: iam supra in Intro-

monuit Claud. Richardus in Argumento Libri de inuentione duarum rectarum linearum continue proportionalium cett.

Introductione expositum est. Fuere quidem ex antiquis Geometris iam plures, qui de hac nostri problematis indole rectius sentirent, ipsumque, quod esset solidum, per plana solui posse negarent; quemadmodum de Herone, Philone aliisque monet Pappus (pag. 7 et 9), qui et ipse ita iudicauit. Sed vt idonea demonstratione illud confirmare possent, nunquam sunt adsequuti. Quibus enim proprie elici deberet talis demonstratio disquisitionibus, pertinebant eae maxime ad doctrinam illam de locis geometricis; quae, quamuis de summa humani ingenii vi et acumine insigne exhiberet documentum, tamen, cum calculo recentiorum eiusque in geometricis quaestionibus vsu destitueretur, semper quodammodo imperfecta mansit, plurimisque grauioribus quaestionibus idonee soluendis nequaquam satisfacere potuit. Pertinet huc etiam quae inter antiquos Geometras minime conuenit quaestio, et cui agitandae inprimis quoque nostri problematis soluendi difficultates occasionem praebuere, quaenam nempe lineae curuae in Geometriam omnino essent recipiendae? cum, secundum illam linearum diuisionem in locos planos, solidos, et lineares, initio quidem tantum loci plani, i. e. recta et circulus pro vere geometricis haberentur, hisque postea demum etiam loci solidi, i. e. conicae sectiones a

 multis

multis adnumerarentur; reliquae autem lineae curuae, quarum cognitionem adhuc admodum imperfectam tenuere veteres, a Geometria plane alienae fere ab omnibus iudicarentur: quemadmodum etiam Pappus quae nostri problematis et illius de anguli trisectione ope circuli et coni sectionum perficiantur solutiones, eas tantum geometricas esse declarat, ab his illas per locos lineares sedulo discernens. Vid post prop. 4. lib. III, (pag. 7); post prop. 30. lib. IV, (pag. 95); necnon post prop. 25. lib. IV, (pag. 88 sq.), atque adhuc passim alibi. Ad hanc igitur, quae adhucusque obtinuisset apud Geometras linearum curuarum diuisio et consideratio, cum respiceret CARTESIVS, in Geometria sua (1537 primum gallice edita) nouam rationem tractandarum curuarum ope Analyseos auspicatus, ex ea etiam, quaenam curuae in Geometriam essent recipiendae, denuo constituere aggressus est. Cum enim relatione ductarum linearum coordinatarum per aequationem algebraicam definienda naturam cuiusuis curuae constituendam primus docuisset: in quibuscunque curuis hoc fieri posset, eas omnes in Geometriam recipiendas duxit; quarum vero naturas calculo suo atque huic inuentae ab ipso methodo subiicere non potuit, quippe quae supponerent aequationes, quas vocant transcendentes, postea demum a Leib-

Leibnitio inuentas, eas appellauit mechanicas et ex Geometria excludendas habuit. In illis igitur curuis (algebraicis) solis tractandis cum versaretur, distinxit eas insuper in genera iuxta quantitates dimensionum in aequatione occurrentium; et quemadmodum a veteribus iam constitutum erat vt magnum peccatum, si problema planum per conica vel linearia inueniretur, atque, quemadmodum summatim dixerunt, si ex improprio solueretur genere (vid. Pappus in libro IV, post prop. 30. pag. 95): sic etiam ille legem tulit, non licere problema per lineam altioris generis construere, quod construi posset per lineam inferioris generis. (Vid. Geometria a Renato Des Cartes, lat. versa et comment. illustrata, opera et studio Francisci a Schooten, Amst. 1683, pag. 67.) Hanc igitur legem ipse exemplo confirmaturus edidit simplicissimam et praestantissimam nostri problematis, quemadmodum etiam illius de anguli trisectione ope parabolae cum circulo coniunctae solutionem, quae in tertio Geometriae libro (pag. 91) explicata legitur; vbi simul docuit, ad hasce duorum illorum problematum constructiones omnia problemata solida reduci posse: atque denique sub finem huius libri nostrum problema et illud de anguli trisectione, ideoque omnino omnia problemata solida absque sectioni-

bus conicis construi non posse, primus idonea demonstratione manifestum reddidit.

Ex iis Geometris, qui Cartesium sequuti de augendis et perficiendis hisce inuentionibus bene meruerunt, nominandus est prae aliis SLVSIVS, qui veras rationes construendarum aequationum per locos geometricos primus eruit, atque ipsas (cum Cartesius in circulo et parabola substitisset) adhibita qualibet curua alteri cuiuis curuae coniuncta innumeris modis exhibendas docuit. Vid. Renati Francisci Slusii Mesolabium s. duae mediae proportionales inter extremas datas per circulum et per infinitas hyperbolas et ellipses et per quamlibet exhibitae, ac problematum omnium solidorum effectio per easdem curuas, Leodii Eburonum, 1654; in quo libro pag. 36 omne problema solidum duarum mediarum inter datas inventione, et anguli trisectione solui posse monet, atque pag. 44, data qualibet ellipse, inter extremas datas ope circuli duas medias proportionales inuenire ingeniose tradit. Sequutus est autem in his omnibus methodum veterum Geometrarum synthetice demonstrandi, occultata analysi, qua in istas inuentiones erat delatus, quam tamen postea in altera libri sui editione singulari tractatu subiunxit. (Leodii Eburonum, 1668, vna cum adiunctis Miscellaneis).

Senten-

Sententiae illius Cartesianae de problemate, quod construi posset per lineas inferioris generis, per lineam altioris generis non construendo, contrarium amplexus NEVTONVS in Arithmetices vniversalis appendice de aequationum constructione lineari (pag. 250) elegantissimam simul et simplicissimam ope conchoidis nostri problematis, vt etiam illius de anguli trisectione, exhibuit solutionem, ad Archimedem et Pappum prouocans, qui per istam curuam angulum tripartito secandum declarauerint; atque simul generaliter docuit, qua ratione per istam curuam omnes aequationes cubicae, ideoque etiam biquadraticae construi possent quam facillime. Monuit insuper ibidem, Geometriam excogitatam esse et excultam praecipue eum in finem, vt expedito linearum ductu effugeremus computandi taedium, ideoque arithmeticas et geometricas disciplinas non esse confundendas; atque igitur cum arithmetice quidem esset simplicius, quod per simpliciores determinaretur aequationes, geometrice vero simplicius, quod per simpliciorem ductum linearum colligeretur: in Geometria prius et praestantius esse debere, quod esset ratione geometrica simplicius; quare non aequationis, qua curua definiretur simplicitate, sed sola descriptionis, qua in plano exarari posset, facilitate, curuam reddi geometricam.

Quamuis igitur conchoidis aequatio afcenderet ad quatuor dimenfiones, noftrum autem problema per fectiones conicas, quae ad duas modo dimenfiones afcenderent, folui poffet: praeferendam tamen effe fuam conftructionem per conchoidem, quam defcriptionis fimplicitate nulli curuae praeter circulum cedere adfirmabat; illam per conicas fectiones folutionem, qualem etiam ibidem expofuit, cum effet magis compofita, quam vt vfibus vllis inferuire poffet, nudam potius fpeculationem effe, fpeculationes autem geometricas tantum habere elegantiae, quantum fimplicitatis, tantumque laudis mereri, quantum vtilitatis fecum afferrent, fimul declarans.

Quae cum ita fint expofita, adfirmare fane licet, quod in antiqua hiftoriae mathematicae tempora cadere fupra fatis fuperque confirmatum vidimus, in quibus quidem noftri problematis foluendi ftudia tantopere profuerint ad mathematicas difciplinas ipfas magis excolendas, nouisque et praeftantiffimis acceffionibus et incrementis amplificandas: hoc non prorfus alienum effe habendum etiam a recentiori aeuo, cum quidem accuratior et abfolutior de ipfius natura et foluendi ratione inueftigatio fatis coniuncta fuiffe appareat cum grauiffimis illis inuentionibus, qui-

bus

bus noua penitus et perfectior Geometriae auspicata est tractatio et constitutio; adeo vt, qui praeter Neutonum seculi decimi septimi extiterint Geometrae primarii Cartesianas amplexi inventiones, ex eorum choro fere nullus sit excipiendus, qui non aliquas meditationes de inueniendis mediis continue proportionalibus doctrinae impenderit. Laudandi ex his adhuc supersunt: CHRISTIANVS HVGENIVS, (vid. Christ. Hugenii, Const. F. de Circuli Magnitudine inventa. Accedunt eiusdem Problematum quorundam illustrium constructiones, Lugd. Bat. 1654; pag. 49 sqq.) CAROLVS RENALDINIVS, qui in Geometra promoto, Patavii, 1670 edito, nostrum problema per lineas quasdam curuas, quas Mediceas vocauit, soluendum expertus est; ISAACVS BARROVIVS (vidd. Isaaci Barrouii Lectiones opticae et geometricae, Lond. 1674); atque denique VINCENTIVS VIVIANI, qui in secunda Diuinatione geometrica de Locis solidis, in quinque Libros iniuria temporum amissos Aristaei Senioris Geometrae, Florentiae, 1707 euulgata, etiam nostrum problema attigit.

Ceterum quae adhuc recentissimis temporibus protulit nonnullorum Geometrarum, palmam ex nostro problemate soluendo aliquam adhucdum

in

in medio poſitam eſſe opinantium, pertinax ſtudium et inueſtigandi diligentia, ex his nonnulla, quae inſpicere nobis contigit, ſub finem huius libri laudaſſe ſufficiet.

La duplication du cube, la triſection de l'angle et l'inſcription de l'heptagone regulier dans le cercle par Mr. COMIERS PREVOST, à Paris, 1677.

La duplication du cube par le cercle et la ligne droite, ou reſolution geometrique en cinq manières du problème propoſé par le Sr. *Comiers*; le tout demontré par une methode auſſi particulière que facile à concevoir, et par des raiſons ſi fortes, qu'elles ne laiſſent aucun lieu de douter de la certitude de la reſolution, qui eſt fondée ſur les mêmes principes qu' Euclide donne dans ſes elemens, par Mr. BRVNET, Avocat au Parlement de Provence, à Paris, 1682.

Nuovo Metodo Geometrico per trovare fra due linee rette date infinite medie continue proporzionali (di *Paolo-Mattia Doria*), in Venezia, 1715.

Dimoſtrazione de Luogo ove terminano le linee cubiche ricercate nel Libro intitolato *Nuovo Metodo Geometrico per trovare fra due linee rette*

date

date infinite medie continue proporzionali; in Napoli, 1715.

Lettera de Signor D. *Paolo-Mattia Doria* indrizata al Signor *Giacinto di Cristoforo*, nella quale si dimonstra, che la Parabola Apolloniana in qualunque modo che si descriva, non è linea geometrica; e che in consegnenza di ciò sono falsi tutte le altre curve. Di nuovo dall' Autore reviduta ed ampliata, in Amst. 1718.

Delle Opere Matematiche di Paolo-Mattia Doria, Tomo primo, nel quale si contengono la Duplicazione del Cubo, ed altre Opere a cagione di quella dall' Autore fatte, e in varii tempi pubblicate, e in quest' ultima edizione di nuove considerazioni ornate, con l'aggiunta nel fine d'una Lettera, colla quale si risponde a due articoli, che si leggono nel Libro intitolato Actor. erudit. quae Lipsiae publicantur, supplementa, tomus VII. In Venezia, 1722; Tomo secondo, nel quale vi si contengono varie Considerazioni ed Esercitazioni geometriche, e la Duplicazione del Cubo dimostrata per la via generale d'Euclide etc. In Venezia, 1726.

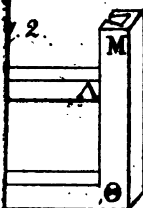
Duplicationis Cubi Demonstratio a Paulo-Mattia Doria inuentore, celeberrimae Regiae Societatis

cietatis Angliae censurae exposita. Hac latina editione maximopere aucta, Venetiis, 1730.

De Circuli Quadratura et de Cubi Duplicatione, cum similium aliarum rerum accessione, Demonstrationes Geometricae, D. D. D. Maiestati sanctissimae Reginae Matris Virginis ab PHILIPPO DE CARMAGNINIS, in Philosophia et Medicina Doctore, Florentiae, 1751; Della Quadratura del Circolo e del Doppiamento del Cubo, con la giunta di altre simili Cose Dimostrazioni Geometriche D. D. D. alla Maestà della SS^ma. Regina Madre Vergine da FILIPPO CARMAGNINI, Dottore in Filosofia e Medicina. In Firenza, 1751.

Solution du Probleme Deliaque demontrée par JACQUES CASANOVA DE SEINGALT, Bibliothecaire de Mr. le Comte de Waldstein, Seigneur de Dux en Bohéme; à Dresde, 1791.

Tab. I.



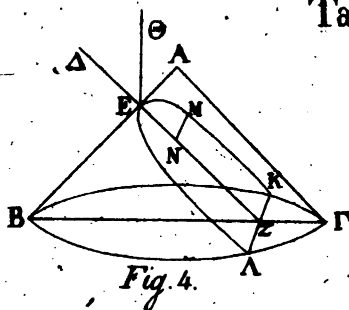


Fig. 4.

